

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО НАПРАВЛЕНИЮ «МАТЕМАТИКА»

для 11 класса

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

Примечание:

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1. (7 баллов)

Найдите значение выражения $x + y$, если $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

Ответ: 1

Задача 2. (7 баллов)

Числа a , b , c таковы, что $a : b : c = 2 : 3 : 15$. Число a уменьшили на 10%, b увеличили на 20%, а значение c – не изменили. На сколько процентов изменилось значение суммы этих трёх чисел?

Ответ: 2

Задача 3. (7 баллов)

Укажите количество целых чисел, заключённых между корнями уравнения

$$2x^2 + 3x - 17 = 2(11 - 4\sqrt{7}) + 3(\sqrt{7} - 2) - 17$$

Ответ: 3

Задача 4. (7 баллов)

Найдите наименьшее целое x , при котором определена функция

$$y = \sqrt{\frac{3+x}{x-1}} + \sqrt{x}$$

Ответ: 2

Задача 5. (7 баллов)

Площадь правильного треугольника составляет $16\sqrt{3}/3$ см². Найдите его биссектрису (в см).

Ответ: 4

Задача 6. (7 баллов)

Найдите наибольшее натуральное a , при котором система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет меньше четырёх решений.

Ответ: 2

Задача 7. (13 баллов)

Найдите все такие положительные числа x , что:

$$\frac{1}{[x]} - \frac{1}{[2x]} = \frac{1}{6\{x\}}$$

Комментарий. Квадратными скобками $[x]$ обозначена функция взятия целой части числа x (то есть максимального целого числа, не превосходящего x), а фигурными скобками $\{x\}$ – дробная часть числа x , по определению равная $\{x\} := x - [x]$.

Ответ: 4/3; 23/9; 31/8

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8. (13 баллов)

Угол B треугольника ABC равен 60° , а угол C этого треугольника равен 54° . На стороне BC отметили такую точку P , что периметр четырёхугольника $ACPM$ равен периметру треугольника PMB , где M – середина AB . Найдите величину угла MPB .

Ответ: 27°

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9. (16 баллов)

В спортзале бегают 71 первоклассник. Старшеклассникам Коле и Сергею дали список этих школьников и попросили занести их в таблицу в порядке возрастания роста (известно, что они все различного роста). Коля и Сергей решили выполнить это задание так: Коля называет любых трёх первоклассников по списку, а Сергей их ловит, сравнивает по росту и сообщает Коле, кто из троих по росту средний (Коля сам не смотрит, а только слушает ответы Сергея). Какое максимальное количество школьников Коля сможет гарантированно поставить в списке на правильную позицию (по возрастанию) после 1225 вопросов?

*В этой задаче требуется привести **полное решение:***

Ответ: за такое количество вопросов можно гарантированно определить позицию только одного (среднего по росту) школьника.

Задача 10. (16 баллов)

Натуральные числа m и n таковы, что $3^m - 2^n$ делится на 47. Какой остаток может давать число $4m + n$ при делении на 23?

В этой задаче требуется привести **полное решение:**

Ответ: 0