Вопрос **Инфо**

в.2 (последняя)

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Теория игр» состоит только из инвариантной части. Это означает, что вам нужно постараться решить все задачи и ответить на все вопросы, чтобы претендовать на призовые места.

Все задания выполняются в этой системе: **решения вносите в специальное поле для ответов.** Если решение требует указания формул, графиков и схем, можно выполнить решение на чистых листах А4 и загрузить фото/скан работы в конце состязания (на это у вас будет 15 минут).

В последние 15 минут, когда таймер подсветится красным, выполнять задания запрещено: это время отведено на загрузку файлов. Если справитесь с заданиями раньше, можете не дожидаться последних 15 минут, а начинать загружать файлы и завершать работу, но с момента начала фотографирования/сканирования делать пометки в работе уже не разрешается.

Обратите внимание на то, что черновики к проверке **не принимаются**. Использование сторонних ресурсов и справочных материалов строго запрещено.

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 20,00

в.1 (из 3)

Новогодние равновесия (20 баллов)

(a) Юра и Яна нашли красивое тождество $2026=2^{11}-2*11$ и теперь хотят придумать себе тематическую игру на Новый год. Игра должна быть на двух игроков, у каждого из игроков должно быть 11 чистых стратегий. Ребята хотят, чтобы в игре было как минимум 2026 равновесий Нэша (включаются как равновесия в чистых, так и в смешанных стратегиях). При этом ребята не хотят, чтобы равновесий было бесконечно много. Помогите ребятам придумать подходящую новогоднюю игру!

(b) Пока ребята думали над игрой, к ним присоединилась Элина и предложила придумать другую игру на трех игроков. Чтобы не делать игру слишком сложной, ребята решили оставить по две чистых стратегии у каждого игрока; условие на конечность числа равновесий сохраняется. Элину интересуют полностью смешанные равновесия: это равновесия, при которых каждый из игроков использует каждую чистую стратегию с ненулевой вероятностью. Могут ли ребята придумать подходящую игру, в которой есть хотя бы два различных полностью смешанных равновесия, но число вообще всех равновесий конечно? Если да, приведите пример, если нет - докажите.

New Year's Equilibria (20 points)

(a) Yura and Yana found the beautiful identity $2026=2^{11}-2*11$ and now want to come up with a themed game for New Year's. The game should be for two players, each with 11 pure strategies. They want the game to have at least 2026 Nash equilibria (including both pure and mixed strategy equilibria). However, they don't want an infinite number of equilibria. Help them come up with a suitable New Year's game!

(b) While the boys were thinking about the game, Elina joined them and suggested coming up with another game for three players. To keep the game simple, the boys decided to keep each player to two pure strategies; the condition of a finite number of equilibria remains. Elina is interested in completely mixed equilibria: these are equilibria in which each player uses each pure strategy with non-zero probability. Can the friends come up with a suitable game in which there are at least two distinct completely mixed equilibria, but the total number of equilibria is finite? If so, give an example; if not, prove it.

Вопрос 2

Балл: 15,00

в.4 (последняя)

За мой счёт (15 баллов)

Элина, Настя и Даша собрались в кафе отпраздновать день рождения Элины. Настя и Даша решили, что счет оплатит та из них, кто проиграет в следующую игру. Элина выбирает целое число от 1 до 10. Настя и Даша по очереди называют целые числа от 1 до 10, начиная с Насти. После каждой попытки Элина честно говорит выше её число или ниже. Если названо выбранное Элиной число, то игра заканчивается. Угадавший число становится победителем, а второй — проигравшим.

Какое число нужно назвать Насте на первом ходу, если известно, что, каждая девочка хочет выиграть и не оплачивать счет? При этом Элина не является стратегическим игроком и выбирает число случайно.

It's on me (15 points)

Elina, Nastya, and Dasha gathered at a cafe to celebrate Elina's birthday. Nastya and Dasha decided that the loser of the next game will pay the bill. Elina chooses a whole number from 1 to 10. Nastya and Dasha take turns naming whole numbers from 1 to 10, starting with Nastya. After each guess, Elina honestly says whether her number is higher or lower. If Elina's chosen number is called, the game ends. The person who guesses the number correctly wins, and the other loses.

What number should Nastya name on her first turn if it's known that each girl wants to win and not pay the bill? Elina isn't a strategic player and chooses her number randomly.

Вопрос 3

Балл: 15,00

в.3 (последняя)

Простой ним (15 баллов)

Маша и Витя скучают на берегу моря в феврале, где плавать оказалось холодно, но зато можно сколько угодно играть в камушки. Они решили, как и каждый год когда они приезжают в отпуск, сыграть в ним, и Маша предложила обновленную версию. Они сделают одну кучу из 2026 камней и будут по очереди брать из нее камушки. За один ход можно взять любое **простое** число камней или один камень, но ничего не брать нельзя. Начинает, например, Витя. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает.

Если друзья играют оптимально, то кто должен победить в этой игре? Опишите равновесную стратегию.

Simple Nim (15 points)

Masha and Vitya are bored at the seaside in February, where it's too cold to swim, but they can play pebbles as much as they want. They decided to play nim, as they do every year when they go on vacation, and Masha suggested an updated version. They'll make a pile of 2026 stones and take turns taking stones from it. In one move, they can take any **prime** number of stones or one stone, but they can't take nothing. For example, Vitya starts. The player who can't make a move loses.

If the friends play optimally, who should win this game? Describe the equilibrium strategy.

Вопрос 4

Балл: 15,00

в.3 (последняя)

Камила, Нейросеть, Безупречность (15 баллов)

Гениальная исследовательница компьютерного зрения Камила создала нейросеть, которая по лицу человека может определить, покажет он камень, ножницы или бумагу. Много желающих было посоревноваться с нейросетью в “камень-ножницы-бумага”, но интерес быстро пропадал: нейросеть безупречно понимала намерения людей и всегда побеждала. Пришлось звать на помощь Чемпиона мира по “камень-ножницы-бумага”. Чемпион умеет держать каменное лицо, когда он хочет выбросить “ножницы” или “бумагу”, и нейросеть не предугадывает его намерение. Однако, когда он хочет выкинуть “камень”, с вероятностью 50% нейросеть понимает его намерения, показывает “бумагу” и побеждает.

Чемпион является большим специалистом в теории игр. Он решил разработать стратегию, которая учитывала бы его слабость перед нейросетью. Гениальная Камила догадалась о стратегии Чемпиона, поэтому также задала алгоритм нейросети: с какой вероятностью выкидывать “камень”, “ножницы” или “бумагу”, если не удалось считать лицо Чемпиона.

Приходит время матча, оптимальные стратегии найдены. Тот, кто проигрывает в игре, платит победителю монету. Найдите матожидание выигрыша Камилы в отдельно взятой игре.

Kamila, Neural Network, Impeccability (15 points)

Kamila, a brilliant computer vision researcher, created a neural network that can determine whether a person will throw rock, paper, or scissors based on their face. Many people wanted to compete with the neural network at rock-paper-scissors, but their interest quickly faded: the neural network flawlessly understood people's intentions and always won. They had to call on the World Rock-Paper-Scissors Champion for help. The champion maintains a poker face when he wants to throw scissors or paper, and the neural network doesn't predict his intention. However, when he wants to throw rock, the neural network has a 50% chance of understanding his intentions, throwing paper, and winning.

The champion is a great expert in game theory. He decided to develop a strategy that would take into account his weakness against the neural network. The brilliant Kamila figured out the Champion's strategy, so she also set the neural network algorithm: what is the probability of throwing "rock," "paper," or "scissors" if the Champion's face is not detected.

The match begins, and the optimal strategies have been found. The loser pays the winner a coin. Find Kamila's expected value for winning this particular game.

Вопрос 5

Балл: 15,00

в.2 (последняя)

Целевой прием (15 баллов)

На трёхстороннем рынке целевого приёма есть абитуриенты, вузы и заказчики, их надо разбить на тройки, в которых они будут связаны взаимными обязательствами. (Для простоты будем считать, что у каждого вуза и каждого заказчика только одно место для зачисления, и число агентов с каждой стороны одинаковое.) Предпочтения у агентов друг относительно друга *циклично-лексикографические*:

– у каждого абитуриента есть некоторые строгие предпочтения относительно заказчиков (согласно зарплате и количеству корпоративов), а вузы играют вторичную роль;

– у каждого заказчика есть строгие предпочтения относительно вузов (согласно репутации), а абитуриенты играют вторичную роль;

– у каждого вуза есть строгие предпочтения относительно абитуриентов, и эти предпочтения одинаковы (согласно баллам ЕГЭ), а заказчики значения не имеют.

Будет ли – для любых предпочтений сторон – существовать стабильное сочетание, то есть такое разбиение на тройки, что ни одна иная блокирующая тройка (абитуриент, вуз, заказчик) не предпочтёт отказаться от своих обязательств в исходном сочетании и вместо этого сочетаться друг с другом? В блокирующей тройке каждому должно стать не хуже, а кому-то должно стать строго лучше. Требуется доказать или опровергнуть существование.

Targeted Admissions (15 points)

In a three-sided targeted admissions market, there are applicants, universities, and clients. They must be divided into triads, bound by mutual obligations. (For simplicity, we will assume that each university and each client has only one available slot, and the number of agents on each side is the same.) The agents' preferences relative to each other are *cyclical-lexicographic*:

– each applicant has certain strong preferences relative to clients (based on salary and number of corporate events), while universities play a secondary role;

– each client has strong preferences relative to universities (based on reputation), while applicants play a secondary role;

– each university has strong preferences relative to applicants, and these preferences are the same (based on Unified State Exam scores), while clients are irrelevant.

Will there exist — for any preferences of the parties — a stable combination, that is, a partitioning into triads such that no other blocking triad (applicant, university, client) would prefer to abandon their obligations in the original combination and instead combine with each other? In the blocking triad, everyone should be no worse off, and some should be strictly better off. This existence must be proven or disproved.

Вопрос 6

Балл: 20,00

в.5 (последняя)

Битва не на жизнь, а на смерть (20 баллов)

Две компании очень хотят вытеснить друг друга с рынка. С остальными конкурентами они уже расправились. Если им всё же удастся выдавить оппонента, то полезность от монопольного положения каждая оценивает в 270 у.е. Для того чтобы выдавить оппонента, нужно принимать некоторые серьезные и затратные меры. Соответствующая игра потенциально может продолжаться долго и устроена следующим образом. В момент 1 первая компания решает, вкладываться ли в борьбу против оппонента. Если она сразу откажется и, соответственно, сдастся, то она должна уйти с рынка, она ничего не тратит и не получает, а оппонент выиграет 270 и игра закончится. Если она решит вложиться в борьбу, то это стоит ей ровно 100 единиц полезности, которые невозвратны при любом дальнейшем развитии событий.

В момент 2, если первая компания не сдалась ранее, то вторая компания должна решить, стоит ли бороться. Борьба стоит также 100, а сдаться можно бесплатно, но тогда выигрывает первая компания.

В момент 3, если вторая компания не сдалась, то ход снова переходит к первой, и она снова должна решить, тратить ли ей еще 100 единиц на борьбу. И так далее по очереди. Затраты компании накапливаются по 100 за каждый период, когда именно она принимает решение вложиться в борьбу. В тот момент, когда какая-либо компания сдастся, игра закончится и ее оппонент победит.

Максимальный бюджет, который каждая компания может потратить на борьбу в сумме за свои ходы, ограничен и является частной информацией каждой компании, неизвестной оппоненту. Бюджет может быть либо маленький, равный 200, либо большой, равный 500. Бюджеты можно считать случайными величинами, причем для первой компании вероятность большого бюджета равна 0.8, а для второй 0.95. Эти априорные вероятности известны обеим компаниям, также каждая компания знает свой бюджет. При трате денег на борьбу компания не может в сумме выйти тратами за пределы своего бюджета.

Известный международный аналитик ознакомился с ситуацией и заявил, что, по его мнению, совсем скоро первая компания займет монопольное положение на этом рынке. Это вызвало некоторые сомнения местного сообщества. Определите, стоит ли верить эксперту? Если да, то постройте соответствующее равновесие. Если нет, то покажите, что такая конфигурация неравновесна, и предложите более обоснованный прогноз.

A Life-or-Death Battle (20 points)

Two companies desperately want to drive each other out of the market. They've already dealt with the remaining competitors. If they do manage to squeeze each other out, each estimates the utility of a monopoly position at 270 units. To squeeze out the other, they must take some serious and costly measures. This game has the potential to last a long time and is structured as follows. At moment 1, the first company decides whether to invest in the fight against the other. If it immediately refuses and, therefore, surrenders, it must exit the market, spends nothing, and gains nothing, while the other company wins 270 units, and the game ends. If it decides to invest in the fight, this costs exactly 100 units of utility, which are irrecoverable no matter what happens next.

At moment 2, if the first company hasn't surrendered earlier, the second company must decide whether to fight. Fighting also costs 100, and surrendering is free, but then the first company wins.

At time 3, if the second company doesn't surrender, the turn passes again to the first company, and it must again decide whether to spend another 100 units on fighting. And so on, one after the other. A company's costs accumulate by 100 for each period in which it decides to invest in fighting. When one company surrenders, the game ends and its opponent wins.

The maximum budget each company can spend on fighting, combined across its turns, is limited and is private information for each company, unknown to its opponent. The budget can be either small, equal to 200, or large, equal to 500. Budgets can be considered random variables, with the probability of a large budget for the first company being 0.8, and for the second, 0.95. These prior probabilities are known to both companies, and each company also knows its own budget. By spending money on competition, the company cannot exceed its budget.

A renowned international analyst has reviewed the situation and stated that, in his opinion, the first company will soon achieve a monopoly position in this market. This has raised some doubts in the local community. Determine whether the expert's assessment should be trusted. If so, construct a corresponding equilibrium. If not, demonstrate that this configuration is not an equilibrium and propose a more reasonable forecast.