

Международная олимпиада молодёжи 2020

10 класс, тренировочный вариант

1. (7 баллов) В прямоугольном треугольнике длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найдите синус его меньшего угла.
2. (7 баллов) Решите неравенство $4x - 5 > \sqrt{1 + x(x + 2)} + \sqrt{-3x^2 + 6x + 24}$.
3. (7 баллов) Вычислите значение выражения $\arctg(\sqrt{2\sqrt{3}} + 1) - \arctg(\sqrt{2\sqrt{3}} - 1)$.

В качестве результата в задании подразумевается число либо арифметическое выражение с несколькими числами, которое возможно вычислить явно, используя лишь конечное количество арифметических операций.

4. (7 баллов) Найдите сумму всех целых a , при которых оба различных корня уравнения $x^2 + 4x + a - 4 = 0$ располагаются в интервале $(-6; 0)$.
5. (7 баллов) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2y^2 + x^2 - 3xy = 7 \\ 10x^2y^2 + 3x^2 - 20xy = 3 \end{cases}$$

6. (7 баллов) Сколько существует четырёхзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры чётны?
7. (13 баллов) На плоскости даны две касающиеся окружности Γ_1 и Γ_2 радиусов 4 и 9, и их внешняя касательная l (то есть касающаяся этих окружностей не в их точке касания). Найдите радиус окружности, которая касается Γ_1, Γ_2 и l (и лежит в части плоскости ограниченной со всех сторон дугами окружностей и отрезком общей касательной).
8. (13 баллов) Найдите расстояние между множествами на координатной плоскости, которые задаются уравнениями $4x + 3y - 7 = 0$ и $x^2 + y^2 - 14x - 18y + 121 = 0$.

Под расстоянием между точечными множествами тут понимается минимум из расстояний от точки одного множества до точки другого множества.

9. (16 баллов) Обозначим через x количество цифр числа 2^{2019} , а через y – количество цифр числа 5^{2019} . Найдите чему равно $x + y$.
10. (16 баллов) На автобусном маршруте 11 остановок, включая первую. На первой остановке в автобус сели 10 пассажиров, и на всех последующих остановках кроме конечной суммарное количество вошедших и вышедших пассажиров было равно 10. Кроме того, оказалось, что каждый пассажир ехал не более 5 остановок (то есть от остановки № M не далее, чем до остановки № $M + 5$), и ни в какой момент движения автобус не был пустым. Какое наибольшее количество пассажиров могло одновременно оказаться в автобусе во время движения?