

Международная олимпиада молодёжи 2020

11 класс, тренировочный вариант

1. (7 баллов) Дано $x + y = 2\sqrt{11}$, $xy = -5$. Найдите расстояние между x и y на числовой оси.
2. (7 баллов) Найдите множество всех таких a , что уравнение $|x| + 5a = ax - 1$ имеет два корня.
3. (7 баллов) На вещественной прямой отмечены все точки x , удовлетворяющие условию:

$$\cos^2 \pi x + \frac{\cos 2\pi x}{x^2 - 1} \geq \sin^2 \pi x$$

Найдите суммарную длину интервалов вещественной прямой, состоящих из отмеченных точек, лежащих в пределах от -100 до 100.

4. (7 баллов) Найдите сумму корней уравнения $25^x - e^2 \cdot 5^x = 5^{x+2} - 125$.
5. (7 баллов) Найдите сумму значений параметра a при которых следующая система имеет только два решения:

$$\begin{cases} |x + y| \geq a + 3 \\ x^2 + y^2 = (a + 2)^2 \end{cases}$$

6. (7 баллов) В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идёт число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочесть однозначно, не зная каким способом она записана?
7. (13 баллов) Три сферы единичного радиуса касаются некоторой плоскости в трёхмерном пространстве, а также попарно друг друга. К этим сферам добавили ещё одну, касающуюся их всех и той же плоскости. Найдите её радиус.
8. (13 баллов) Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и серванты. На изготовление одного книжного шкафа расходуется $4/3$ м² древесной доски, $4/3$ кг гвоздей и $2/3$ человека-часа рабочего времени. Для изготовления же одного серванта требуется 2 м² древесной доски, 1.5 кг гвоздей и 2 человеко-часа. Прибыль от продажи одного шкафа составляет 5000 руб., а от продажи серванта – 12000 руб. Месячные ресурсы фирмы составляют 180 м² древесной доски, 165 кг гвоздей, 160 человеко-часов рабочего времени. Какую максимальную месячную прибыль может получить фирма?
9. (16 баллов) Учитель вычислил все остатки от деления числа 365 на числа 1, 2, 3, ..., 365, полученные остатки сложил и записал их сумму на доске. В ответ его ученик вычислил все остатки от деления числа 366 на 1, 2, 3, ..., 366, эти остатки также сложил и сумму записал себе на листок. Чьё записанное число оказалось больше?
10. (16 баллов) При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих типов присутствовали?