

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

Международная олимпиада молодёжи - 2020

**Критерии оценки; перечень, содержание тем и
литература для подготовки к олимпиаде по направлению «Математика»
для учащихся 10-11 классов**

Москва 2019

Олимпиадное состязание по направлению «Математика» Международной олимпиады молодежи - 2020 (МОМ-2020) проводится в очном (офлайн) и дистанционном (онлайн) форматах. Каждый участник МОМ-2020 может выбрать только один формат участия – или очно (на площадке в стране), или дистанционно ([Правила участия](#) в очных и дистанционных олимпиадных состязаниях, п. 2).

Время выполнения заданий в очном и дистанционном форматах – 180 минут.

Задание Международной олимпиады молодёжи-2020 по «Математике» состоит из десяти задач, разбитых на три блока:

- Задачи *первого блока* (с 1-й по 6-ю) оцениваются исходя из максимума **7 баллов** за задачу, при их оценивании учитывается только ответ;
- Задачи *второго блока* (7-я и 8-я) оцениваются исходя из максимума **13 баллов** за задачу, при их оценивании учитываются ответ и схема решения;
- Задачи *третьего блока* (9-я и 10-я) оцениваются исходя из максимума **16 баллов** за задачу; оценивается целиком всё решение на предмет того, насколько оно верное, полное и корректно изложенное.

Как видно из описания, задачи с 7-й по 10-ю предполагают написание либо части решения, либо решения целиком. Под «**схемой решения**» во *втором блоке* понимается тезисная запись решения – запись ключевых шагов решения без детальных выкладок и написания связного текста. Пример схематичного решения можно найти в конце данного текста.

В случае участия в состязании в онлайн формате, у участника будет возможность либо ввести текстовую часть решения в специальное окно ввода, либо загрузить решение в одном из предложенных стандартных форматов. (Условия и правила участия в онлайн-формате публикуются на [странице «Математика»](#) сайта Олимпиады в сентябре 2019 года.)

Предпочтительным для загрузки является формат .pdf, конвертировать в который текстовый файл позволяет большинство стандартных редакторов. Дополнительные возможные форматы файла (если такие будут) будут уточнены непосредственно в публикуемых в сентябре 2019 года условиях и правилах участия в онлайн-состязании.

«Сложность задачи» - понятие, во многом, субъективное и зависит от интересов и умений каждого конкретного участника. Тем не менее, «в среднем», задачи в условии будут выстроены по сложности. Задачи *первого блока* ближе к экзаменационным, проверяющим владение понятиями и методами школьной программы. Задачи *второго блока* выходят за пределы стандартной программы, но скорее относятся к более техническим темам углублённой школьной математики. Задачи *третьего блока* близки по

стилю, программе и сложности к задачам национальных соревнований по математике и задачам Международной математической олимпиады.

Для решения заданий Международной олимпиады молодёжи-2020 по направлению «Математика» достаточно владения стандартными разделами школьной программы, которые мы перечисляем ниже. Однако олимпиадные задачи требуют от участника не только знаний, но и креативности, умения рассуждать, анализировать результаты вычислений, высказывать гипотезы, проверять их и доказывать. Уже более 50 лет олимпиады, предлагающие нестандартные задачи, являются важной традицией российского математического образования. За это время выпущено множество сборников олимпиадных задач различной степени сложности, по которым школьник может познакомиться с задачами такого стиля и попробовать свои силы в их решении. Некоторые из этих сборников перечислены ниже. Кроме того, в течение последних 50 лет олимпиадные задачи обсуждались и решались на всевозможных математических кружках, а материалы занятий этих кружков публиковались. Конечно, такие материалы тоже могут оказаться полезными, и мы также приводим некоторый, далеко не полный, их перечень. Следует, однако, иметь в виду, что в "кружковых" книжках могут иногда, на вполне доступном школьнику уровне, разбираться сложные задачи и обсуждаться глубокие математические результаты. Хотя это чтение чрезвычайно полезно для развития математических способностей, владение подобным материалом не является необходимым для решения олимпиадных задач.

Основная литература

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров, 1994

Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М., МЦНМО, 2002

Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М., МЦНМО, 2007

Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М., МЦНМО, 2010

Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. М., «Просвещение», 1996

Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. М., МЦНМО, 2011

Дополнительная литература

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области, М.: Физматкнига, 2006

Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993-2005. М., МЦНМО, 2008

Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы. М., МЦНМО, 2007

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. 2011

Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2006

Заславский А.А. Геометрические преобразования. 2004

Толпыго А.К. Девяносто шесть нестандартных задач. 2008

Толпыго А.К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов. 2010

Шаповалов А.В. Принцип узких мест. 2008

Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. 2008

Ключевые понятия школьной программы к 10 и 11 классам

Делимость: целые, рациональные и иррациональные числа, деление с остатком, признаки делимости, разложение на простые множители, НОД и НОК, запись рациональных чисел десятичными дробями

Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств, решение систем линейных уравнений, уравнения и неравенства с параметром, составление уравнений в текстовых задачах, сложные проценты

Планиметрия: аксиомы, треугольники, тригонометрические функции и обратные к ним, теоремы синусов и косинусов, окружности, касание, многоугольники, площадь, подобие, симметрия

Декартовы координаты, понятие функции и ее графика, область определения и значений, уравнения прямых и окружностей, парабола

Сложные функции, обратные функции, степенная, показательная и логарифмическая функции, производная, отыскание промежутков монотонности и максимума функции с ее помощью

Многочлены, деление многочленов с остатком, формула Виета

Прогрессии: арифметическая, геометрическая, их суммы

Стереометрия: многогранники, сфера, площадь поверхности, объем

Пример схематичного решения:

Задача 7 (демоверсия задания МОМ-2016):

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел a и b , что число $2a^2 + 3b^2$ делится на число $2a + 3b$.

Схема доказательства:

1. Рассматриваем разности $2a^2 + 3b^2 - a(2a + 3b)$ и $2a^2 + 3b^2 - b(2a + 3b)$, каждая из которых делится на $2a + 3b$. Получаем, что $(b - a) \cdot \text{НОД}(2a, 3b)$ делится на $2a + 3b$.
2. Преобразуем к виду $(b - a) \cdot \text{НОД}(2, b) \cdot \text{НОД}(3, a)$ делится на $2a + 3b$.
3. Если $a = b$, то из взаимной простоты получаем решение $a = b = 1$.
4. Если $\text{НОД}(2, b) \cdot \text{НОД}(3, a) \leq 2$, то получаем противоречие, используя свойство: если натуральное n делится на натуральное m , то $n \geq m$.
5. Если $\text{НОД}(2, b) \cdot \text{НОД}(3, a) = 3$, то вычитая из $(b - a) \cdot \text{НОД}(2, b) \cdot \text{НОД}(3, a)$ число $2a + 3b$ получаем, что $5a$ делится на $2a + 3b$. Получаем постороннее решение.
6. Если $\text{НОД}(2, b) \cdot \text{НОД}(3, a) = 6$, то аналогично предыдущему пункту получаем $10a$ делится на $2a + 3b$.
7. Используя $b = 2b'$ и $a = 3a'$, получаем, что 5 делится на $a' + b'$. Получаем два посторонних решения и два настоящих решения (3, 8) и (9, 4).

Ответ: все искомые пары чисел: (1,1); (3,8); (9,4).