Международная олимпиада молодёжи – 2021
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ “МАТЕМАТИКА”
10 класс

Время выполнения заданий – 180 минут
Максимальная оценка – 100 баллов

1. **(7 баллов)** Рассмотрим все прямоугольники, длины сторон которых выражены целым числом метров, и периметр которых (в метрах) численно равняется площади (в метрах квадратных). Найдите суммарную площадь всех таких, разных по размеру сторон, прямоугольников. *Прямоугольники, отличающиеся порядком сторон, например,* 10×20 *и* 20×10 *считаем одинаковыми.*

2. **(7 баллов)** Найдите суммарную длину интервалов на координатной прямой, заданных неравенством $25x^2 - 4|8 - 5x| < 80x - 64$.

3. **(7 баллов)** Вычислите целую часть числа: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^6 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^6$.

4. **(7 баллов)** Найдите значение параметра a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 12a} + a - 3 = 0$ минимальна.

5. **(7 баллов)** Найдите максимальное произведение xy среди целочисленных решений (x, y) следующей системы:
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - y^2 = 18 \\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

6. **(7 баллов)** Сколько существует чисел, десятичная запись которых не содержит единиц, и произведение цифр которых равно 300?

7. **(13 баллов)** Вдоль прямой катятся 40 одинаковых шаров. Скорость каждого из них равна v, однако направление шаров может различаться. Периодически эти шары совершают абсолютно упругие соударения: при столкновении два шара мгновенно меняют скорость на равную по модулю и обратную по направлению. Какое максимальное количество ваимоударений могло произойти между этими шарами?

8. **(13 баллов)** В равнобедренную трапецию $ABCD$ (основания AB и CD), вписана окружность γ. Пусть T – точка касания этой окружности со стороной BC, а P – вторая точка пересечения AT с γ. Вычислите отношение AB/CD, если $AP/AT = 7/23$.

9. **(16 баллов)** Для простого числа $p > 3$ нашлись такие натуральные числа k, ℓ, m и n, что $p^k + p^\ell + p^m = n^2$. Докажите, что $p + 1$ делится на 8.

10. **(16 баллов)** Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше 20 цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечётной суммой цифр, во вторую — с чётной суммой цифр. Докажите, что сумма 10ых степеней всех чисел первой группы равна сумме 10ых степеней всех чисел второй группы.