НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Международная олимпиада молодёжи - 2021

Критерии оценки; перечень, содержание тем и литература для подготовки к олимпиаде по направлению «Математика»

для 10-11 классов

Москва 2020

Олимпиадное состязание по направлению «Математика» Международной олимпиады молодежи - 2021 (МОМ-2021) проводится в очном и дистанционном форматах. Каждый участник МОМ при регистрации может выбрать только один формат участия – или очно на площадке в стране, или дистанционно (онлайн).

Время выполнения заданий в обоих форматах – 180 минут.

Задание Международной олимпиады молодёжи - 2021 по Математике состоит **из десяти задач**, разбитых на три блока:

- Задачи *первого блока* (с 1ой по 6ую) оцениваются, исходя из максимума **7 баллов** за задачу, при их оценивании учитывается только ответ;
- Задачи *второго блока* (7ая и 8ая) оцениваются, исходя из максимума **13 баллов** за задачу, при их оценивании учитываются ответ и схема решения;
- Задачи *третьего блока* (9ая и 10ая) оцениваются, исходя из максимума **16 баллов** за задачу; оценивается целиком всё решение на предмет того, насколько оно верное, полное и корректно изложенное.

Как видно из описания, задачи с 7ой по 10ую предполагают написание либо части решения, либо решения целиком. Под **«схемой решения»** во *втором блоке* понимается тезисная запись решения – запись ключевых шагов решения без детальных выкладок и без написания связного текста. Пример схематичного решения можно найти в конце данного текста.

В случае участия в состязании в онлайн-формате, у участника будет возможность либо ввести текстовую часть решения в специальное окно ввода, либо загрузить решение в одном из предложенных стандартных форматов.

Предпочтительным для загрузки является формат .pdf, конвертировать в который текстовый файл позволяет большинство стандартных редакторов. Дополнительные возможные форматы файла (если такие будут) будут уточнены непосредственно при выдаче задания.

«Сложность задачи» - понятие, во многом, субъективное и зависит от интересов и умений каждого конкретного участника. Тем не менее, «в среднем» задачи в условии будут выстроены по сложности. Задачи *первого блока* ближе к экзаменационным, проверяющим владение понятиями и методами школьной программы. Задачи *второго блока* выходят за пределы стандартной программы, но скорее относятся к более техническим темам углублённой школьной математики. Задачи *третьего блока* близки по стилю, программе и сложности к задачам национальных соревнований по математике и задачам Международной математической олимпиады.

Для решения большинства заданий олимпиады достаточно знаний в пределах школьной программы, основные пункты которой мы перечисляем ниже. Однако олимпиадные задачи требуют от участника не только знаний, но и креативности, умения рассуждать, анализировать результаты вычислений, высказывать гипотезы, проверять их и доказывать.

Уже более 50 лет олимпиады, предлагающие нестандартные задачи, являются важной традицией российского математического образования. За это время выпущено множество сборников олимпиадных задач различной степени сложности, в которых школьник может познакомиться с задачами такого стиля и попробовать свои силы в их решении. За столь долгое время, конечно, математики накопили большой опыт решения нестандартных школьных задач. Это привело к возникновению неформального «олимпиадного минимума» - нечёткого набора приёмов и теорем, которые также оказались чрезвычайно полезны в решении олимпиадных задач, которые доказываются, исходя из материалов школьной программы, но сами уже выходят за её пределы.

Основными источниками такого «олимпиадного минимума» являются тематические сборники олимпиадных задач, а также материалы занятий разнообразных математических кружков и факультативов. Некоторые из этих источников перечислены ниже. Следует иметь в виду, что в "кружковых" книжках часто на доступном школьнику уровне разбираются очень сложные задачи и обсуждаются глубокие математические результаты. Хотя такое чтение чрезвычайно полезно для развития математических способностей, владение всем этим материалом из задачника не является необходимым для решения олимпиадных заданий.

Основная литература

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров, 1994

Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М., МЦНМО, 2002

Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М., МЦНМО, 2007

Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М., МЦНМО, 2010

Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. М., «Просвещение», 1996

Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. М., МЦНМО, 2011

Дополнительная литература

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области, М.: Физматкнига, 2006

Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993-2005. М., МЦНМО, 2008

Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы. М., МЦНМО, 2007

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. 2011

Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2006

Заславский А.А. Геометрические преобразования. 2004

Толпыго А.К. Девяносто шесть нестандартных задач. 2008

Толпыго А.К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов. 2010

Шаповалов А.В. Принцип узких мест. 2008

Шень А.Х. Игры и стратегии с точки зрения математики. 2008

www.imo-official.org, раздел Задачи – условия и т.н. шорт-листы прошедших Международных математических олимпиад

Ключевые понятия школьной программы к состязанию для 10го и 11го классов (как ориентир для задач *первого блока*)

Числа: от натурального к действительному, способы записи, аксиоматический подход, делимость натуральных чисел, НОД и НОК, разложения на простые множители.

Функции: линейные, рациональные, задающиеся набором условий, показательные, тригонометрические, многочлены и корни n-го порядка, обратная функция, деление многочленов с остатком.

Свойства функций: график функции, сдвиги графика функции, возрастание/убывание, чётность/нечётность, минимум/максимум, периодичность.

Неравенства: линейные и квадратные, рациональные неравенства и метод интервалов, использование свойств функций для сравнения значений.

Уравнения: линейные, квадратные, теорема Виета, рациональные, сложные проценты, системы уравнений, тригонометрические, корни многочленов от одной переменной.

Последовательности: арифметическая, геометрическая прогрессии, сумма членов последовательности, предел последовательности.

Производная: предел функции, правила дифференцирования, использование для анализа функции, точки экстремума, уравнение касательной к графику функции.

Комплексные числа: арифметические операции, геометрическая интерпретация, возведение в степень и извлечение корня.

Комбинаторика и теория вероятности: метод полного перебора, подсчёт элементов дополнительного множества, формула включений/исключений, сочетания/перестановки/размещения, математическое ожидание, комбинаторное определение вероятности, геометрическая вероятность.

Геометрия треугольника: признаки равенства и подобия, базовые вспомогательные объекты треугольников: медиана, высота, биссектриса, вписанная и описанная окружности, «замечательные» точки треугольника.

Арифметика углов: углы при параллельных прямых, вписанный и центральный угол окружности, угол между касательной и хордой, специфические обозначения на чертежах для вычислений углов.

Подсчёты в треугольнике: неравенство треугольника, теоремы синусов и косинусов, теоремы Чевы и Менелая, вычисления базовых элементов треугольника через длины сторон и триг функции углов, площади треугольников и более сложных фигур.

Векторно-координатный подход: базовые операции на векторах, координатное определение базовых геометрических объектов, скалярное произведение векторов.

Геометрические преобразования: движения, композиции движений, гомотетия.

Стереометрия: построение сечений, базовые трёхмерные объекты и их объёмы, правильные многогранники, векторы в пространстве и метод координат, параллельность и перпендикулярность в пространстве.

Пример схематичного решения

Задача 7 (демовариант МОМ-2016):

Найдите все такие пары взаимного простых натуральных чисел a и b, что число $2a^2+3b^2$ делится на число $2a+3b$.

Схема доказательства:

1. Рассматриваем разности $2a^2+3b^2-a(2a+3b)$ и $2a^2+3b^2-b(2a+3b)$, каждая из которых делится на $2a+3b$. Получаем, что $(b-a)\cdot$ НОД$(2a,3b)$ делится на $2a+3b$.
2. Преобразуем к виду $(b-a)\cdot$ НОД$(2,b)\cdot$ НОД$(3,a)$ делится на $2a+3b$.
3. Если $a=b$, то из взаимной простоты получаем решение $a=b=1$.
4. Если НОД$(2,b)\cdot$ НОД$(3,a)$ ≤ 2, то получаем противоречие используя свойство: если натуральное n делится на натуральное m, то $n\geq m$.
5. Если НОД$(2,b)\cdot$ НОД$(3,a)=3$, то вычитая из $(b-a)\cdot$ НОД$(2,b)\cdot$ НОД$(3,a)$ число $2a+3b$ получаем, что $5a$ делится на $2a+3b$. Получаем постороннее решение.
6. Если НОД$(2,b)\cdot$ НОД$(3,a)=6$, то аналогично предыдущему пункту получаем $10a$ делится на $2a+3b$.
7. Используя $b=2b'$ и $a=3a'$ получаем, что 5 делится на $a'+b'$. Получаем два посторонних решения и два настоящих решения (3, 8) и (9, 4).

Ответ. Все искомые пары чисел: (1,1); (3,8); (9,4).