Международная олимпиада молодёжи – 2021
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ “МАТЕМАТИКА”
11 класс

Время выполнения заданий – 180 минут
Максимальная оценка – 100 баллов

1. **(7 баллов)** Точки P и Q – две противоположные вершины куба с ребром 6. Два шара радиусов 1 и 2 поместили внутрь этого куба так, что один шар касается всех граней куба, содержащих P, а другой шар касается всех граней куба, содержащих Q. Найдите расстояние между центрами шаров.

2. **(7 баллов)** Найдите суммарную длину интервалов отрицательных чисел, удовлетворяющих условию $\dfrac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \dfrac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$.

3. **(7 баллов)** Найдите максимально возможный остаток от деления квадратного трёхчлена $-x^2 - x + 13$ на линейный многочлен $4x - a$ (при всевозможных вещественных значениях параметра a).

4. **(7 баллов)** Для произвольного $x \neq 0$ про функцию $f(x)$ известно, что $f(\frac{x^2+49}{x}) = \dfrac{4x - 2x^2 - 98}{x^2 + 49}$. Вычислите $f(16)$.

5. **(7 баллов)** Чему равна сумма $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{48}] + [\sqrt{49}]$?
Квадратными скобками обозначена функция взятия (нижней) целой части числа

6. **(7 баллов)** Сколько натуральных делителей числа $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ сами имеют нечётное число натуральных делителей?

7. **(13 баллов)** Дана окружность радиуса 5 с центром в точке O. Пусть AB – хорда этой окружности, длина AB равна 6. Впишем квадрат $PQRS$ в сектор AOB так, чтобы точка P была на отрезке OA, точка Q – на отрезке OB, а точки R и S лежали на окружности. Найдите площадь квадрата $PQRS$.

8. **(13 баллов)** На листе клетчатой бумаги рисуют выпуклый 100-угольник с вершинами в узлах сетки. Какое наибольшее число диагоналей этого 100-угольника может идти по линиям сетки?

9. **(16 баллов)** Найдите все натуральные n, для которых каждое число, записываемое с помощью $n - 1$ единицы и одной семерки является простым. (Например, число 1711 к таким не относится, так как равно $29 \cdot 59$)

10. **(16 баллов)** На плоскости дана 2021 точка, некоторые пары точек соединены отрезками. Точки первоначально раскрашены в два цвета. Каждую минуту (одновременно) те точки, которые соединены с четным количеством точек такого же цвета, меняют свой цвет. Докажите, что исходная раскраска не сможет снова получиться через нечетное число минут.