МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

I. Методические рекомендации по подготовке к состязанию

Олимпиады, предлагающие нестандартные задачи, являются важной традицией международного математического образования. Издано множество сборников олимпиадных задач различной степени сложности, в которых учащийся может познакомиться с задачами такого стиля и попробовать свои силы в их решении. Большой опыт математиков в решении нестандартных школьных задач привел к возникновению неформального «олимпиадного минимума» - нечёткого набора приёмов и теорем, которые также оказались чрезвычайно полезны в решении олимпиадных задач и которые доказываются, исходя из материалов школьной программы, но сами уже выходят за её пределы.

Основными источниками такого «олимпиадного минимума» являются тематические сборники олимпиадных задач, а также материалы занятий разнообразных математических кружков и факультативов. Некоторые из этих источников перечислены ниже. Следует иметь в виду, что в "кружковых" книгах часто на доступном учащемуся уровне разбираются очень сложные задачи и обсуждаются глубокие математические результаты. Хотя такое чтение чрезвычайно полезно для развития математических способностей, владение всем этим материалом из задачника не является необходимым для решения олимпиадных заданий.

Олимпиада по направлению «Математика» МОМ-2022 проводится в офлайн- и онлайн-форматах. Каждый участник при регистрации может выбрать только один формат участия – или очно на площадке в стране, или дистанционно. Время выполнения заданий в обоих форматах – 180 минут.

Задание по математике состоит **из десяти задач**, разбитых на три блока:

- Задачи *первого блока* (с 1-й по 6-ю) оцениваются исходя из максимума **7 баллов** за задачу, при их оценивании учитывается только ***ответ***;
- Задачи *второго блока* (7-я и 8-я) оцениваются исходя из максимума **13 баллов** за задачу, при их оценивании учитываются **ответ и схема решения**;
- Задачи *третьего блока* (9-я и 10-я) оцениваются исходя из максимума **16 баллов** за задачу; оценивается **целиком всё решение** на предмет того, насколько оно верное, полное и корректно изложенное.

Как видно из описания, задачи с 7-й по 10-ю предполагают написание либо части решения, либо решения целиком. Под **«схемой решения»** во *втором блоке* понимается краткое перечисление основных шагов решения. Пример схематичного решения можно найти в конце текста данного материала для подготовки (**).

В случае написания олимпиады в онлайн-формате (через систему контроля «прокторинг»), участникам будет предложено ввести текстовую часть решения в специальное окно ввода.

«Сложность задачи» - понятие, во многом, субъективное и зависит от интересов и умений каждого конкретного участника. Тем не менее, «в среднем» задачи в условии будут выстроены по сложности. Задачи *первого блока* ближе к экзаменационным, проверяющим владение понятиями и методами школьной программы. Задачи *второго блока* выходят за пределы стандартной программы, но скорее относятся к более техническим темам углублённой школьной математики. Задачи *третьего блока* близки по стилю, программе и сложности к задачам национальных соревнований по математике и задачам Международной математической олимпиады.

Для решения большинства задач олимпиады достаточно знаний в пределах школьной программы, основные пункты которой перечисляются ниже. Однако олимпиадные задачи требуют от участника не только знаний, но и креативности, умения рассуждать, анализировать результаты вычислений, высказывать гипотезы, проверять их и доказывать.

II. Ключевые понятия учебных программ по математике для подготовки к состязанию (как ориентир для *первого блока* задач – с 1-й по 6-ю):

- для 10 класса

Числа: от натурального к действительному, способы записи, аксиоматический подход, делимость натуральных чисел, НОД и НОК, разложения на простые множители.

Функции: линейные, рациональные, задающиеся набором условий, показательные.

Свойства функций: график функции, сдвиги графика функции, возрастание/убывание, чётность/нечётность, минимум/максимум, периодичность

Неравенства: линейные и квадратные, рациональные неравенства и метод интервалов, использование свойств функций для сравнения значений.

Уравнения: линейные, квадратные, теорема Виета, рациональные, сложные проценты, системы уравнений.

Последовательности: арифметическая, геометрическая прогрессии, сумма членов последовательности.

Комбинаторика и теория вероятности: метод полного перебора, подсчёт элементов дополнительного множества, формула включений/исключений, сочетания/перестановки/размещения, математическое ожидание, комбинаторное определение вероятности, геометрическая вероятность.

Геометрия треугольника: признаки равенства и подобия, базовые вспомогательные объекты треугольников: медиана, высота, биссектриса, вписанная и описанная окружности, «замечательные» точки треугольника.

Арифметика углов: углы при параллельных прямых, вписанный и центральный угол окружности, угол между касательной и хордой, специфические обозначения на чертежах для вычислений углов.

Подсчёты в треугольнике: неравенство треугольника, теоремы синусов и косинусов, теоремы Чевы и Менелая, вычисления базовых элементов треугольника через длины сторон и триг функции углов, площади треугольников и более сложных фигур.

Векторно-координатный подход: базовые операции на векторах, координатное определение базовых геометрических объектов, скалярное произведение векторов.

Геометрические преобразования: движения, композиции движений, гомотетия.

- для 11 класса***

Числа: от натурального к действительному, способы записи, аксиоматический подход, делимость натуральных чисел, НОД и НОК, разложения на простые множители.
Функции: линейные, рациональные, задающиеся набором условий, показательные, *тригонометрические, многочлены и корни n-го порядка, обратная функция, деление многочленов с остатком.*
Свойства функций: график функции, сдвиги графика функции, возрастание/убывание, чётность/нечётность, минимум/максимум, периодичность
Неравенства: линейные и квадратные, рациональные неравенства и метод интервалов, использование свойств функций для сравнения значений.
Уравнения: линейные, квадратные, теорема Виета, рациональные, сложные проценты, системы уравнений, *тригонометрические, корни многочленов от одной переменной.*
Последовательности: арифметическая, геометрическая прогрессии, сумма членов последовательности, *предел последовательности*.
Производная: предел функции, правила дифференцирования, использование для анализа функции, точки экстремума, уравнение касательной к графику функции.
Комплексные числа: арифметические операции, геометрическая интерпретация, возведение в степень и извлечение корня.
Комбинаторика и теория вероятности: метод полного перебора, подсчёт элементов дополнительного множества, формула включений/исключений, сочетания/перестановки/размещения, математическое ожидание, комбинаторное определение вероятности, геометрическая вероятность.
Геометрия треугольника: признаки равенства и подобия, базовые вспомогательные объекты треугольников: медиана, высота, биссектриса, вписанная и описанная окружности, «замечательные» точки треугольника.
Арифметика углов: углы при параллельных прямых, вписанный и центральный угол окружности, угол между касательной и хордой, специфические обозначения на чертежах для вычислений углов.
Подсчёты в треугольнике: неравенство треугольника, теоремы синусов и косинусов, теоремы Чевы и Менелая, вычисления базовых элементов треугольника через длины сторон и триг функции углов, площади треугольников и более сложных фигур.
Векторно-координатный подход: базовые операции на векторах, координатное определение базовых геометрических объектов, скалярное произведение векторов.
Геометрические преобразования: движения, композиции движений, гомотетия.
Стереометрия: построение сечений, базовые трёхмерные объекты и их объёмы, правильные многогранники, векторы в пространстве и метод координат, параллельность и перпендикулярность в пространстве.

III. Список рекомендованной литературы

Основная литература

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.
Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М., МЦНМО, 2002.
Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М., МЦНМО, 2007.
Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М., МЦНМО, 2010.
Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. М., «Просвещение», 1996.
Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. М., МЦНМО, 2011.

Дополнительная литература

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области, М.: Физматкнига, 2006.
Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993-2005. М., МЦНМО, 2008.
Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы. М., МЦНМО, 2007.
Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. 2011.
Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2006.
Заславский А.А. Геометрические преобразования. 2004.
Толпыго А.К. Девяносто шесть нестандартных задач. 2008.
Толпыго А.К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов. 2010.
Шаповалов А.В. Принцип узких мест. 2008.
Шень А.Х. Игры и стратегии с точки зрения математики. 2008.

IV. Интернет-ресурсы

Международная Математическая Олимпиада: [Электронный ресурс]. URL: www.imo-official.org (Раздел «Задачи» – условия и т.н. шорт-листы прошедших Международных математических олимпиад.)

*****Пример схематичного решения задачи второго блока олимпиадного задания:***

Задача 7 (демоверсия МОМ-2016):

Найдите все такие пары взаимного простых натуральных чисел a и b, что число $2a^2+3b^2$ делится на число $2a+3b$.

Схема доказательства:

1. Рассматриваем разности $2a^2+3b^2-a(2a+3b)$ и $2a^2+3b^2-b(2a+3b)$, каждая из которых делится на $2a+3b$. Получаем, что $(b-a)\cdot \text{НОД}(2a,3b)$ делится на $2a+3b$.
2. Преобразуем к виду $(b-a)\cdot \text{НОД}(2,b)\cdot \text{НОД}(3,a)$ делится на $2a+3b$.
3. Если $a=b$, то из взаимной простоты получаем решение $a=b=1$.
4. Если $\text{НОД}(2,b)\cdot \text{НОД}(3,a)\ \leq 2$, то получаем противоречие используя свойство: если натуральное n делится на натуральное m, то $n\geq m$.

5. Если $НОД(2, b) \cdot НОД(3, a) = 3$, то вычитая из $(b - a) \cdot НОД(2, b) \cdot НОД(3, a)$ число $2a + 3b$ получаем, что $5a$ делится на $2a + 3b$.
    - Рассматриваем такое a', что $a = 3a'$. Рассматриваем $НОД(a', 2a + 3b)$. Получаем решение (6, 1) и постороннее решение $(3, 4)$.
6. Если $НОД(2, b) \cdot НОД(3, a) = 6$, то аналогично предыдущему пункту получаем $10a$ делится на $2a + 3b$.
    - Используя $b = 2b'$ и $a = 3a'$ получаем, что 5 делится на $a' + b'$. Получаем два посторонних решения и два настоящих решения (3, 8) и (9, 4).

Ответ: все искомые пары чисел: (1,1); (6, 1); (3,8); (9,4).

****Курсивом* выделены понятия учебной программы по математике, которые добавляются для участников 11 класса к программе 10 класса.