Международная олимпиада молодёжи - 2021
Математика
10 класс, вариант 1

1. Для детей 4-8 лет рекомендуемая доза суточного потребления кальцая составляет 800 мг. При этом в одном стакане молока (200 мл) содержится около 296 мг кальция. Какую долю суточного потребления кальция содержит один стакан молока? *Ответ дайте в процентах.*

2. Найдите минимальное целое x для которого выполняется следующее неравенство:
$$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\geq\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$$

3. Решите неравенство $(x-1)^2-10|x-1|+21\leq 0$. В качестве ответа запишите сумму всех целочисленных решений.

4. Числа x и y удовлетворяют системе неравенств:
$$\begin{cases} x^2-y^2\geq 40 \\ 0\leq x-y\leq 4 \end{cases}$$
Весом пары чисел (x,y) назовём величину x^2+y^2. Найдите все пары (x,y), при которых выражение $x+y$ принимает минимальное возможное значение. Для всех этих пар вычислите сумму весов.
Например, если искомые пары – это $(1,2)$ *и* $(3,4)$, *то в качестве ответа следует записать* $30=(1^2+2^2)+(3^2+4^2)$.

5. Найдите периметр выпуклого многоугольника, вершинами которого являются решения следующего уравнения:
$$((|x|-12)^2+(|y|-12)^2)((|x+y|-17)^2+(|x-y|-17)^2)=0$$

6. Есть палочка длины 13 и на ней есть 12 засечек (отстоящих друг от друга на расстоянии 1). Найдите количество вариантов разрубить палочку в двух различных местах, чтобы из полученных частей можно было построить треугольник (чтобы было выполнено неравенство треугольника).

7. Внутри прямоугольника $ABCD$ расположена окружность. К этой окружности провели касательные AQ, BP, CN, DM из вершин прямоугольника и оказалось, что $BP=8, CN=10, DM=7$. Найдите чему равно AQ^2.

8. В первый день учёбы 30 школьников выстроили в шеренгу. Оказалось, что для каждого школьника с номером от 2 до 15 (включительно, считая слева направо) количество друзей среди ребят с номером большим, чем i, на 1 больше количества друзей среди ребят с номером меньше, чем i.

   Для ребят с номерами от 16 до 29 (включительно, считая слева направо) выполнено похожее свойство: для каждого школьника с номером i количество друзей среди ребят с номером меньшим, чем i, на 2 больше, количества друзей среди ребят с номером большим, чем i.

   Оказалось, что у школьника с номером 1 всего 19 друзей. Сколько друзей у школьника с номером 30?

9. Найдите все целые n такие, что $1 < n < 10^6$ и $n^3 - 1$ делится на $10^6 n - 1$.

10. Рассматрим все множества из 49 различных натуральных чисел, меньше или равных 100. Стёпа дал каждому из этих множеств натуральный номер меньше или равный 100 (номера разных множеств могли при этом совпасть). Докажите, что существует такое множество L, состоящее из 50 различных натуральных чисел меньше или равных 100, что для каждого числа x из L номер, данный Стёпой множеству $L - \{x\}$, не равен числу x.

    Комментарий: $L - \{x\}$ обозначает множество, которое получается при удалении числа x из множества L.