

# Международная олимпиада молодёжи - 2021

## Математика

### 10 класс, вариант 2

1. В выражении  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{29}{30}$  буквы  $a, b, c$  и  $d$  обозначают целые числа от 1 до 9. Чему равно  $a + b + c + d$ ?
2. Найдите суммарную длину интервалов значений  $x$  из отрезка  $[-10, 10]$  на вещественной оси, удовлетворяющих неравенству:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+5} - \frac{3}{x+10} \geq 0$$

3. Сколько целых  $x$  удовлетворяет неравенству:  $\sqrt{17-2x} \leq \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 7}}{\sqrt{x-1}}$ .
4. Решите неравенство  $\frac{25}{x^2+18x+82} \leq -18x - x^2 - 72$ . В ответ запишите сумму квадратов целочисленных решений.
5. Вычислите сумму  $\left[ \frac{11}{18} \right] + \left[ \frac{2 \cdot 11}{18} \right] + \left[ \frac{3 \cdot 11}{18} \right] + \dots + \left[ \frac{i \cdot 11}{18} \right] + \dots + \left[ \frac{17 \cdot 11}{18} \right]$ .

*Комментарий:* под квадратными скобками тут понимается операция взятия (нижней) целой части числа.

6. Четыре семейные пары пришли на семейный ужин. Они хотят так сесть за стол, чтобы были выполнены два условия:
  - Каждый человек хочет видеть своего супруга (супругу) одним из соседей;
  - Каждый человек хочет, чтобы среди его соседей был один мужчина и одна женщина.Сколько существует вариантов такой раскладки?

*Раскладки, отличающиеся сдвигом всех людей одновременно на одно и то же количество позиций вокруг стола, т.е. «отличающиеся поворотом», также считаются различными*

7. В прямоугольном треугольнике  $ABC$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 6$ . Пусть  $G$  – точка пересечения медиан треугольника. На сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  отмечены такие точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  соответственно, что  $GA'$  перпендикулярно  $BC$ ,  $GB'$  перпендикулярно  $AC$ , а  $GC'$  перпендикулярно  $AB$ . Найдите площадь треугольника  $A'B'C'$ .

8. Рассмотрим множество  $M = \{1, 2, \dots, 50\}$ . Его подмножество будем называть “хорошим”, если оно не содержит никаких шести последовательных чисел и имеет максимально возможное для этого условия количество элементов. Найдите количество хороших подмножеств.

9. Решите уравнение в натуральных числах  $x! + y! = 5z!$ .

*Под  $n!$  мы понимаем факториал натурального числа  $n$ , то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$ . Например,  $1! = 1$ ,  $2! = 1 \cdot 2 = 2$ ,  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ , ...*

10. Группа туристов состоит из 50 человек. Среди любых трёх из них найдутся двое незнакомых. Известно, что эту группу нельзя разместить в двух автобусах так, чтобы в каждом из автобусов не было знакомых. Докажите, что в этой группе найдётся турист, у которого не более, чем 20 знакомых.