Международная олимпиада молодёжи - 2021
Математика
10 класс, вариант 3

1. Шестеро друзей: Аня, Боря, Вера, Гриша, Даша и Елисей стали в круг (именно в таком порядке, по первым буквам: А, Б, В, Г, Д, Е. При этом Е соседний с А), и каждый шёпотом назвал своё любимое число двум своим соседям. Затем каждый из них сказал вслух сумму двух услышанных чисел; Аня назвала число 38, Вера – число 22, Даша – число 26. Какое любимое число у Елисея?

2. Обозначим за α максимальное значение $\frac{x+6}{x^3+216}$. Найдите $\frac{1}{\alpha}$.

3. Найдите минимальное положительное b, при котором уравнение $x^2 + bx + 12b$ имеет два различных целых корня.

4. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ – некоторый квадратный трёхчлен. Найдите такие a, b и c, что значения $f(1),\ f(2)$ и $f(4)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии и при этом $b^2 - a^2 = 80$. В качестве ответа запишите модуль найденного значения b.

5. Найдите минимальное значение выражения $x^2 + y^2$, если x и y удовлетворяют условию $x^2 + 18x - y^2 - 2y = -80$.

6. Найдите количество троек целых чисел (x, y, z), являющихся решением системы
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ |x| + |y| + |z| = 16. \end{cases}$$

7. Обозначим как N количество способов так расставить 8 не бьющих друг друга ладей на клетчатой доске 9×9, раскрашенной в шахматном порядке в белый и чёрный, чтобы они все стояли на клетках одного цвета. Вычислите и запишите в виде числа в десятичной записи $N/5!$.

   Комментарий: раскраской доски *в шахматном порядке* называется раскраска клеток доски в чёрный и белый цвета, каждая клетка 1×1 целиком в один цвет, при котором цвета чередуются: любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета.

   Две ладьи считаются *бьющими* друг друга, если они стоят в одном и том же столбце или одной и той же строке доски.

   $k!$ – это обозначение для факториала числа k, то есть для выражения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны, а биссектриса угла B проходит через середину стороны CD. Вычислите отношение $\frac{BC}{AB}$, если $CD = 3AD$.

9. В школе проводятся 10 факультативов. На собрании руководителей факультативов выяснилось, что для любых двух школьников найдётся факультатив, на который один из них записан, а другой – нет. Могло ли в этой школе учиться более 1000 учеников?

   Комментарий: факультативы в этой школе посещают только ученики этой школы.

10. Натуральное число n таково, что существует ровно 25 пар натуральных чисел x и y, для которых $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$. Докажите, что n — точный квадрат.