Международная олимпиада молодёжи - 2021
Математика
11 класс, вариант 1

1. Богдан наполняет контейнер объёмом 2 м^3 водой из реки неподалёку. Для этого он использует канистру, основание которой имеет форму квадрата со стороной 30 см, а высота канистры 40 см. Какое минимальное количество ходок потребуется Богдану, чтобы заполнить изначально пустой контейнер целиком?

2. Обозначим как α наибольшее значение x среди $x < 1$, при котором выполняется неравенство:
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq 0$$
Вычислите $\frac{1}{\alpha^2}$.

3. Найдите минимальное значение суммы квадратов корней уравнений $x^2 + (2a+3)x + 2a$.

4. Найдите максимальное значение выражения $\frac{x^2+1}{x^4+\frac{33}{256}}$.

5. Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с первым членом $b_1 > 0$ и знаменателем $q \neq 0$. Пусть q_0 максимальное среди значений q для которых выполнено $b_3 \leq b_2 + b_1$. Вычислите $q_0^5 + q_0^4 - 8q_0$.

6. Случайно и равновероятно выбирается число от 1 до 3000. Найдите вероятность, что это число не делится ни на 3, ни на 10.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол ABC равен $82°$. Точка M внутри треугольника такова, что $AM = AB$ и $\angle MAC = 11°$. Найдите величину угла MCB. Ответ введите в градусах.

8. Пусть множество S натуральных чисел таково, что для любых x, y из S верно, что при $x < y$, выполнено $xy < 111y - 148x$. Найдите максимальное количество элементов, которое может содержать S.

9. Каждая грань правильного тетраэдра с ребром длины 2020 разделена на 2020^2 равносторонних треугольников со стороной 1 линиями, параллельными рёбрам тетраэдра. Игроки Павел и Василий отмечают треугольники со стороной 1 по очереди, по одному треугольнику за свой ход, начинает Павел. Каждый отмеченный треугольник, кроме первого, должен иметь не менее одной общей точки с треугольником, отмеченным противником в его предыдущий ход. Треугольники запрещено отмечать более одного раза. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия и приведите её.

10. Натуральные числа a и b удовлетворяют равенству $b^2 = a^2 + ab + b$. Докажите, что b – квадрат натурального числа.