Международная олимпиада молодёжи - 2021
Математика
11 класс, вариант 2

1. В 2019 и в 2020 году Павел сдавал одни и те же 6 экзаменов (по одному экзамену на каждый из шести различных предметов). Он заметил, что по пяти предметам в оба года он получил одинаковые оценки (которые могли различаться за разные предметы). По ещё одному предмету в 2019 году результат был 86 баллов и 68 баллов в 2020 году. В 2019 году среднее арифметическое шести полученных оценок равнялось 84. Чему равно среднее арифметическое оценок в 2020 году?

2. Обозначим через x_0 максимальное значение переменной x для которого неравенство
$$\frac{x^2+4x+1}{x^2-4x+1} > 0$$
не выполняется. Вычислите $x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}$.

3. Найдите минимальное значение выражения $x - \sqrt{x + \frac{19}{4}}$.

4. Вычислите $\left\lfloor \frac{3^0}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^2}{5} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{3^{11}}{5} \right\rfloor$. Ответ дайте в виде целого числа.

   Под $\lfloor x \rfloor$ тут понимается функция взятия (нижней) целой части числа x, то есть, по определению, это наибольшее целое число, не превосходящее x

5. Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = a^n$. Определите количество таких целых чисел a, что для членов последовательности $\{b_n\}$, определённой таким a, верно неравенство:
$$\frac{1}{b_3} - \frac{6}{b_2} + \frac{6}{b_1} - \frac{1}{b_0} \geq 0$$

6. Выбирается случайное число от 1 до 1023. Пусть α – это вероятность, что в двоичной записи числа будет ровно 3 единицы. Вычислите $\frac{10}{\alpha}$.

7. На доске изначально записаны десять, не обязательно различных, натуральных чисел. Далее для них вычисляются следующие 10 сумм: сумма всех кроме первого, сумма всех кроме второго, и так далее, вплоть до суммы всех кроме последнего десятого числа. В результате были получены лишь девять различных результатов, а именно $86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 96$. Найдите изначальные десять чисел. В качестве ответа укажите 4ое по возрастанию число.

8. Пусть углы A и B треугольника ABC равны, соответственно, $90°$ и $75°$, а длина стороны AB равна 3. На сторонах AC и BC выбраны, соотственно, точки P и Q так, что $\angle APB = \angle CPQ$ и $\angle BQA = \angle CQP$. Вычислите QA^2 (то есть квадрат длины отрезка QA).

9. Трое игроков, Петя (П), Вася (В) и Толя (Т), по очереди берут камни из кучи, в которой n камней. Они ходят по очереди, в порядке П, В, Т, П, В, Т, ... Петя начинает игру, а тот, кто берёт последний камень, проигрывает. Петя и Толя объединились против Васи и договариваются о совместной стратегии. Вася может брать любое количество камней от 1 до 7 в каждый ход, в то время как Петя и Толя могут брать в свой ход (каждый из них) 1, 2, 3 или 4 камня. Определите для каких значений n существует выигрышная стратегия для команды Пети и Толи (то есть когда проигрывает Вася), а для каких значений выигрышная стратегия есть у Васи.

10. Докажите, что для четного натурального числа $n \geq 10$ найдется в точности 4 натуральных числа k, для которых $n + k^2$ делится на $n + k$, тогда и только тогда, когда $n = 2p$, где p и $2p + 1$ — простые числа.