

Международная олимпиада молодёжи - 2021

Математика

11 класс, вариант 3

1. Найдите наименьшее пятизначное число, кратное 11, все цифры которого различны.
2. Определите длину пересечения отрезка $[-4, 4]$ с множеством всех вещественных x , для которых выполнено неравенство:

$$x^2 + x + 1 \geq -\frac{1}{x}$$

3. Решите уравнение $\ln(x+1) \cdot \sqrt{x^3 - 8x^2 + 15x + 25} = \ln((x+1)^{x+2})$.
В качестве ответа запишите сумму квадратов решений.
4. Найдите максимальное такое вещественное a , что уравнение $x + a = \sqrt{1 - x^2}$ имеет хотя бы одно вещественное решение. В качестве ответа укажите a^6 .
5. Найдите количество пар натуральных чисел (x, n) , таких что $x \geq 2$ и $x^n \leq 100$.
6. Вова каждый будний день делает уроки под свою любимую музыку. Для этого он каждый будний день равновероятно выбирает одну из 3 виниловых пластинок. Пусть α – вероятность того, что за неделю он послушает каждую пластинку хотя бы один раз. Вычислите $\frac{1}{\alpha}$.
7. Для натуральных $n \leq 2019$ обозначим $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2019}$. Вычислите сумму $S_1 + S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_{2019}^2$.
8. Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с гипотенузой $AB = \sqrt{2}$. Определите какую минимальную площадь может иметь треугольник XYZ вписанный в треугольник ABC (такой, что точки X, Y, Z лежат на отрезках BC, CA, AB соответственно) при условии, что треугольник XYZ также равнобедренный и прямоугольный ($\angle X = 90^\circ$).
9. При каких натуральных m и n число $3^n + 1$ делится на $3^m - 1$?
10. Костя так раскрасил клетки 1×1 клетчатой доски размером 100×100 в четыре цвета, что в каждой строке и в каждом столбце есть по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся такие две строки и два столбца, что среди четырех клеток в их пересечении есть по клетке каждого из цветов.