

Международная олимпиада молодёжи – 2020

Математика

10 класс, вариант 1

1. Для некоторой геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ величина $\frac{b_1 b_4 b_5}{(b_2)^2}$ также является членом этой прогрессии. Найдите его порядковый номер.
2. Решите неравенство: $|\sqrt{x} - x| > 2|x|$.
3. Вычислите $\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} + \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$, где α и β – различные корни квадратного трёхчлена $x^2 - 17x + 20$.
4. Найдите максимальное значение параметра a при котором уравнение $\sqrt{x + 2a - 1} + \sqrt{x - a} = 1$ имеет хотя бы одно решение.
5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x + xy + y = 55 \\ x + xz + z = -15 \\ y + yz + z = -5 \end{cases}$$
6. На вечеринке осьминогов каждый осьминог делает с каждым присутствующим по 4 “ногопожатия”. Сколько “ногопожатий” произойдёт на вечеринке с 37 осьминогами?
7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AP и BQ , пересекающиеся в точке I . Известно, что $\angle AIB = 120^\circ$ и $IQ = 3$. Найдите длину PQ .
8. Клетки доски 11×11 покрашены в белый цвет. Разрешается выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, расположенных по диагонали, перекрасить в черный цвет. Какое наибольшее число черных клеток удастся получить при помощи таких операций?
9. Для простого числа $p > 3$ нашлись такие натуральные числа k, ℓ, m и n , что $p^k + p^\ell + p^m = n^2$. Докажите, что $p + 1$ делится на 8.
10. На плоскости нарисовано 11 вертикальных и 11 горизонтальных отрезков. Докажите, что не может быть так, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекал 10 вертикальных, а каждый вертикальный – 10 горизонтальных.