Международная олимпиада молодёжи – 2020
Математика
10 класс, вариант 2

1. Для некоторой арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ величина $a_1 + 2a_4 + a_3 - 3a_2$ также является членом этой прогрессии. Найдите его порядковый номер.

2. Найдите максимальное значение выражения $13 - 2n - n^2$, где n целое.

3. Вычислите $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, где α и β – различные корни квадратного трёхчлена $x^2 - 31x + 81$.

4. Найдите все такие значения параметра a, что выражение $4a$ – целое, а функция $f(x) = |x - a| - x^2$ не превосходит 1.

5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x\sqrt{x} + 3y\sqrt{x} = 4,5 \\ y\sqrt{y} + 3x\sqrt{y} = 3,5 \end{cases}$$

6. Две шестерёнки зацеплены в механизме своими зубцами так, что одна шестерёнка свободно крутит другую. При этом зубцы шестерёнок двигаются равномерно и касаются других зубцов лишь в момент, когда пересекают линию центров шестерёнок. На одной из шестерёнок 111 зубцов, на другой – 481. Через сколько оборотов меньшей шестерёнки снова встретятся зубцы, которые касаются в данный момент?

7. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC вне него построен квадрат. Точка O – центр квадрата. Найдите CO, если $AC = 6$ и $BC = 8$.

8. Шахматная фигура "стрелок" бьет в каком-то одном направлении по вертикали или горизонтали (например, по горизонтали влево) на любое число клеток, но не бьёт насквозь через другие фигуры. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга стрелков можно расставить на шахматной доске 20×20?

9. Числа от 1 до 600 выписаны в строчку в таком порядке, что при вычеркивании всех чисел, больших 300, остается возрастающая последовательноеть, а при вычеркивании всех чисел, не превосхщящих 300, остается убывающая последовательность. Докажите, что сумма чисел, расположенных на местах со 151-го по 450-го, делится на 3.

10. 25 человек сидят за круглым столом. Каждый час они голосуют: каждый отвечает либо "да", либо "нет". Голосуют они всегда по одному и тому же правилу: если на n-ом голосовании ответ человека такой же как у хотя бы одного из его соседей, то на $(n+1)$-ом круге он голосует так же, как и на n-ом. Если же на n-ом круге оба соседа голосовали не так, как сам человек, то на $(n+1)$-ом круге он меняет свой голос на противоположный. Докажите, что независимо от того, как люди