

Международная олимпиада молодёжи – 2020

Математика

10 класс, вариант 3

1. Рассмотрим все прямоугольники, длины сторон которых выражены целым числом метров, и периметр которых (в метрах) численно равняется площади (в метрах квадратных). Найдите суммарную площадь всех таких, разных по размеру сторон, прямоугольников. *Прямоугольники, отличающиеся порядком сторон, например, 10×20 и 20×10 считаем одинаковыми.*

2. Найдите суммарную длину интервалов на координатной прямой, заданных неравенством $25x^2 - 4|8 - 5x| < 80x - 64$.

3. Вычислите целую часть числа: $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^6 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^6$.

4. Найдите значение параметра a , при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 12a} + a - 3 = 0$ минимальна.

5. Найдите максимальное произведение xy среди целочисленных решений (x, y) следующей системы:

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - y^2 = 18 \\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

6. Сколько существует чисел, произведение цифр которых равно 300?

7. Вдоль прямой катятся 40 одинаковых шаров. Скорость каждого из них равна v , однако направление шаров может различаться. Периодически эти шары совершают абсолютно упругие соударения: при столкновении два шара мгновенно меняют скорость на равную по модулю и обратную по направлению. Какое максимальное количество ваймоударений могло произойти между этими шарами?

8. В равнобедренную трапецию $ABCD$ (основания AB и CD), вписана окружность γ . Пусть T – точка касания этой окружности со стороной BC , а P – вторая точка пересечения AT с γ . Вычислите отношение AB/CD , если $AP/AT = 7/23$.

9. Решите в натуральных числах уравнение $n^{n-1} = 4m^2 + 2m + 3$.

10. Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше 20 цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечётной суммой цифр, во вторую – с чётной суммой цифр. Докажите, что сумма 10ых степеней всех чисел первой группы равна сумме 10ых степеней всех чисел второй группы.