

# Международная олимпиада молодёжи – 2020

## Математика

### 11 класс, вариант 1

1. Найдите все такие  $a$ , что числа  $\frac{1}{2}, a, a^2$  образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке).
2. Решите уравнение  $\sqrt{x^2 - 5x + 12} + x^2 = 5x$ .
3. При изменении вещественного параметра  $a$  в пределах от 4 до 5, корни уравнения  $4x^2 - ax + 1 = 0$  также меняются на вещественной оси. Найдите суммарную длину интервалов на оси  $O_x$ , которые эти корни пробегут при изменении параметра  $a$ .
4. При всех вещественных  $x \neq 3$  для функции  $f$  выполнено равенство:  $f\left(\frac{1}{3-x}\right) = 5x + 1$ . Найдите сумму всех таких натуральных  $y$ , что  $f(y)$  целое.
5. Найдите все значения параметра  $a$ , для которых уравнение  $x^2 + (a - 2)^2 = |x - 2 + a| + |x - a + 2|$  имеет ровно одно решение.
6. В клубе интеллектуалов всего 30 человек, у каждого из которых есть свой личный порядковый номер от 1 до 30 (у всех номера разные). На интеллектуальные соревнования от клуба можно выставить команду произвольного размера, однако в команду запрещено одновременно брать игроков, личные номера которых отличаются ровно в два раза (это считается плохим знаком). Команду какого максимального размера может выставить на соревнования этот клуб?
7. Наследство состоит из нескольких бриллиантов и оценивается в \$1000 000. Известно, что его можно разделить на 5, а можно и на 8 равных частей. Какую наибольшую стоимость может иметь самый маленький бриллиант?
8. Дан ромб  $ABCD$ , угол  $A$  которого равен  $120^\circ$ . Внутри ромба взята точка  $M$  такая, что  $AM = 1, CM = 2$  и  $BM = 3$ . Найдите  $DM$  и  $AB$ .
9. Различные натуральные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $b + c + bc$  делится на  $a$ ,  $c + a + ca$  делится на  $b$  и  $a + b + ab$  делится на  $c$ . Докажите, что хотя бы одно из них составное.
10. 1010 непересекающихся отрезков с концами в вершинах правильного 2020-угольника разбивают эти вершины на пары. Докажите, что на отрезках можно так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю.