

Международная олимпиада молодёжи – 2020

Математика

11 класс, вариант 2

1. Найдите все возможные значения $x - y$, если известно, что $x + y = 6$ и $xy = 2$.
2. Найдите наибольшее отрицательное решение уравнения $\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
3. Найдите суммарную длину интервалов на оси O_x , заданных условием $|5x - 3| < \sqrt{x}$.
4. Дана функция $f(x) = e^{-x} - 2x$. Решите уравнение $f(4x) = f(1 - x^2)$.
5. Найдите все решения уравнения $\sqrt{x} = \sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}$, принадлежащие интервалу $(3, 6)$.
6. На клетчатой доске 30×5 проведена диагональ. Сколько сторон пересекает эта диагональ, если прохождение лишь через вершину клетки не считается за пересечение стороны?
7. На листе клетчатой бумаги рисуют выпуклый 100-угольник с вершинами в узлах сетки. Какое наибольшее число диагоналей этого 100-угольника может идти по линиям сетки?
8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Внутри него взята точка M такая, что $AM = 2$, $\angle AMB = 120^\circ$, $\angle AMC = 105^\circ$. Найдите BM и CM .
9. При каких натуральных n найдутся такие натуральные числа a, b, c и d , что $a + b + c + d = 2n\sqrt{abcd}$?
10. На плоскости дана 2021 точка, некоторые пары точек соединены отрезками. Точки первоначально раскрашены в два цвета. Каждую минуту (одновременно) те точки, которые соединены с четным количеством точек такого же цвета, меняют свой цвет. Докажите, что исходная раскраска не сможет снова получиться через нечетное число минут.