Международная олимпиада молодёжи – 2020
Математика
11 класс, вариант 3

1. Точки P и Q – две противоположные вершины куба с ребром 6. Два шара радиусов 1 и 2 поместили внутрь этого куба так, что один шар касается всех граней куба, содержащих P, а другой шар касается всех граней куба, содержащих Q. Найдите расстояние между центрами шаров.

2. Найдите суммарную длину интервалов отрицательных чисел, удовлетворяющих условию $\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$.

3. Найдите максимально возможный остаток от деления квадратного трёхчлена $-x^2 - x + 13$ на линейный многочлен $4x - a$ (при всевозможных вещественных значениях параметра a).

4. Для произвольного $x \neq 0$ про функцию $f(x)$ известно, что $f(\frac{x^2+49}{x}) = \frac{4x-2x^2-98}{x^2+49}$. Вычислите $f(8)$.

5. Чему равна сумма $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{48}] + [\sqrt{49}]$?
Квадратными скобками обозначена функция взятия (нижней) целой части числа

6. Сколько натуральных делителей числа $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ сами имеют нечётное число натуральных делителей?

7. Дана окружность радиуса 5 с центром в точке O. Пусть AB – хорда этой окружности, длина AB равна 6. Впишем квадрат $PQRS$ в сектор AOB так, чтобы точка P была на отрезке OA, точка Q – на отрезке OB, а точки R и S лежали на окружности. Найдите площадь квадрата $PQRS$.

8. В языке Абабаб словом называется любая последовательность букв 'а' и 'б'. Два слова этого языка называются похожими, если одно из них можно получить из другого за несколько операций следующего вида: выбрать несколько идущих подряд букв, среди которых четное число букв 'а', стереть их, и записать на те же места, но в обратном порядке (например, "аб**ааб**ба" $\rightarrow$ "аб**баа**ба"). Сколько существует непохожих слов из 10 букв?

9. Найдите все натуральные n, для которых каждое число, записываемое с помощью $n-1$ единицы и одной семерки является простым. (Например, число 1711 к таким не относится, так как равно $29 \cdot 59$)

10. План кочек Центрального болота выглядит следующим образом: по центру болота лежит камень, изображённый на плане точкой O, где сидит жабья Королева. Вокруг её камня расположено две концентрические окружности Γ_1 (ближняя к O) и Γ_2 (дальняя от O). 100 радиусов, проведённых из точки O, пересекают сначала ближнюю окружность в точках $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$, а затем дальнюю – в точках $D_1, D_2, \ldots, D_{100}$. Тут точки указаны в порядке следования на окружностях, точки вида B_i и D_i (с одинаковыми номерами) лежат на общем радиусе. Точки B_i и D_j – это кочки Центрального болота. При этом соседними считаются, во-первых, кочки с одинаковыми буквами, и номерами отличающимися на 1 (считаем, что номера 100 и 1 также соседние), во-вторых, с разными буквами, но одинаковыми номерами.

То есть всего на болоте 200 кочек, у каждой кочки ровно 3 соседние. На них сидят 401 жаба. Если на кочке сидят хотя бы 3 жабы, то через некоторое время 3 из них прыгнут одновременно на соседние кочки — по одной на кочку. Докажите, что через некоторое время для любой кочки либо на ней, либо на соседней будет сидеть хотя бы одна жаба.