

**Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига» – 2022 г.
Методические рекомендации и демонстрационная версия заключительного этапа
по направлению «240. Прикладная математика»**

Треки:

«Математические методы анализа в экономике»	Код – 240.1
«Математические методы в социологии»	Код – 240.2
«Прикладная математика в инженерии и естественных науках»	Код – 240.3

Общая информация о направлении

Направление «Прикладная математика» ориентировано на образовательные программы уровня магистратуры, которые предъявляют к абитуриентам требования наличия знаний определенных разделов математики, навыков использования определенных методов анализа данных и моделировании их свойств для решения прикладных и исследовательских задач в специфической предметной области, а также умения формализовать задачу сформулированную на языке предметной области, подобрать адекватный математический метод анализа и моделирования и дать содержательную интерпретацию полученным результатам. Как правило, подобные образовательные программы магистратуры либо организуют вступительные испытания по математике, либо имеют в учебных планах курсы, предполагающие для успешного освоения наличие у слушателей компетенций в области математики. Выпускники этих образовательных программ рассматриваются как грамотные пользователи различных инструментов анализа данных и математического моделирования, способные к их осознанному выбору и использованию в реальных проектах. Адекватная математическая подготовка абитуриентов рассматривается как критический фактор успеха карьерного роста выпускников в выбранной предметной области. Задачи, предлагаемые участникам данного направления, отражают требования образовательных программ магистратуры к знаниям, навыкам и умениям абитуриентов в области математики и позволяют отобрать слушателей, которые смогут успешно освоить учебные планы программ и на самом высоком уровне подготовить диссертационные работы.

Тематика заданий

«Математические методы анализа в экономике»

1. Математический анализ
2. Дифференциальные уравнения
3. Линейная алгебра
4. Математическая статистика
5. Теория вероятностей

«Математические методы в социологии»

1. Математическая статистика
2. Теория вероятностей
3. Анализ данных в социологии
4. Измерение в социологии
5. Социологическая теория
6. Основы анализа сетевых структур

«Прикладная математика в инженерии и естественных науках»

1. Линейная алгебра
2. Дифференциальные уравнения
3. Численные методы

4. Теория массового обслуживания
5. Случайные процессы
6. Обработка данных

Информация о первом (отборочном) этапе

Задания отборочного тура являются общими для всех треков

Продолжительность состязания – 40 минут. (6 заданий по 5 минут на задание)

Задание первого (отборочного) этапа включает 6 задач на русском языке с автоматической проверкой ответов. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается от 16 до 17 баллов. В сумме участник может набрать 100 баллов.

Информация о втором (заключительном) этапе

Продолжительность состязания – 180 минут.

Задания второго (заключительного) этапа состоят из инвариантной (общей для всех треков) и вариативной (специфичной каждого трека) частей.

В инвариантной части участнику предлагается решить три задачи, полный ответ на каждую оценивается в 16 баллов (максимальная оценка за инвариантную часть – 48 баллов). Язык изложения задания – русский.

Максимальный балл за вариативную часть – 52 балла.

В вариативной части по треку **«Математические методы анализа в экономике»** предлагается решить восемь задач, полный ответ на каждую оценивается в 6,5 баллов.

В вариативной части по треку **«Математические методы в социологии»** предлагается выбрать из 4 вопросов два и написать по ним два мини эссе, направленных на использование математических методов и социологическую интерпретацию результатов. Максимальная оценка одного эссе – 26 баллов.

В вариативной части по треку **«Прикладная математика в инженерии и естественных науках»** предлагается решить 5 задач с разным весом (от 8 до 15 баллов) в зависимости от сложности.

Общие требования к заданиям

При выполнении задания участникам разрешено пользоваться калькулятором без возможности программирования; справочными материалами (таблица значений функций распределений), гелиевой ручкой синего цвета, простым карандашом.

Черновики работы не проверяются.

Критерии оценивания решения задач

- Удачная попытка решения – 25%
- Правильный ответ без обоснования – 50%
- Правильный, полностью обоснованный ответ – 100%.

Критерии оценки эссе

- точность, полнота, корректность ответа
- аргументированность и обоснованность выводов и предложений
- ясность, структурированность и логичность изложения решения и анализа.

Демонстрационный вариант второго (заключительного) этапа

Инвариантная часть

Задание 1.

Проинтерпретируйте (уровень значимости примите равным 0.05) все коэффициенты регрессионного уравнения. Переменные «Удовлетворенность правительством», «Удовлетворенность состоянием экономики» и «Удовлетворенность тем, как в стране работает демократия» измерены по шкале 0...10, где 0 означает наименьшую удовлетворенность, 10 – максимальную.

Рассмотрите полученную информацию с точки зрения дискуссий о взаимоотношении экономики и политики. Какую ценность имеет данная модель? Какие есть ограничения?

Коэффициенты^{a,b}

Модель	Нестандартизованные коэффициенты		Стандартизованные коэффициенты	t	Знч.
	B	Стд. Ошибка	Бета		
1 (Константа)	1,057	,201		5,248	,000
Удовлетворенность состоянием экономики	,268	,023	,259	11,632	,000
Удовлетворенность тем, как в стране работает демократия	,490	,021	,507	22,819	,000
Возраст в годах	,001	,002	,011	,567	,571

a. Country = Switzerland

b. Зависимая переменная: Удовлетворенность правительством

Задание 2.

(Based on Patton, 2015)

Consider so called *ADS model* of high frequency stock price movements (Rydberg and Shepard, 1998).

$$\Delta P_t = A_t \cdot D_t \cdot S_t$$

$$A_t = \begin{cases} 1, & \text{if } |\Delta P_t| > 0 \\ 0, & \text{if } \Delta P_t = 0 \end{cases}$$

$$D_t = \begin{cases} 1, & \text{if } \Delta P_t > 0 \\ 0, & \text{if } \Delta P_t = 0 \\ -1, & \text{if } \Delta P_t < 0 \end{cases}$$

$$S_t = |\Delta P_t|$$

P_t is a price of stock at time t, A_t is an indicator of price movement at time t (*action*), D_t is a direction of movement (*direction*), S_t is an absolute change in price (*size*). At first, A_t is determined only then D_t and S_t are realized.

Assume that S_t is distributed geometrically with corresponding probability function:

$$S_t \sim \text{Geometric}(\lambda), \text{ for } \lambda \in [0, 1]$$

$$P(S_t = x) = \lambda(1 - \lambda)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \dots$$

$$E(S_t) = \frac{1}{\lambda}$$

Your colleague has analyzed IBM stock prices and got the following results:

Table 1. Conditional probabilities of fact of price movement.

A_{t-1} / A_t		0	1
0	0.38		0.62
1	0.27		0.73

Table 2. Conditional probabilities of corresponding directions of price movements.

	$D_t A_t = 1$		
D_{t-1}	-1	0	+1
-1	0.47	0	0.53
0	0.4	0	0.6
+1	0.53	0	0.47

Values inside this table represent corresponding probabilities. Thus, from Table 1 we can get that if A_{t-1} was 0 then $P(A_t = 1 | A_{t-1} = 0) = 0.62$.

Also, it is known that $\hat{\lambda} = 0.5$

Using ADS model find values for:

- 1) $P(\Delta P_t = 0 | A_{t-1} = 0)$ (30%)
- 2) $E(\Delta P_t | A_{t-1} = 0)$ (70%) For simplicity you may consider only most probable values of P_t : $P_t \in [-2, 2]$. In this case use “rough” probabilities (don’t normalize them), only restricting possible range of values of P_t . This solution will be fully marked.

Hint: Pay attention to sequence of price movements and realizations of variables A_t, D_t, S_t .

Задание 3.

Дана невырожденная матрица \mathbf{A} порядка \mathbf{n} с действительными или комплексными элементами. Известно, что суммы элементов в каждой строке этой матрицы одинаковы и равны \mathbf{s} . Вычислить суммы элементов каждой строки для матрицы \mathbf{B} , обратной к матрице \mathbf{A} , и убедиться, что все эти суммы также равны между собой. Чему равно их общее значение?

Примечания.

1. На утверждение о связи между собственными векторами матрицы и её обратной можно сослаться (как на известный факт), в противном случае это можно установить «в одну строчку» непосредственно при решении задачи.
2. Задачу можно решать с помощью описания обратной матрицы через присоединенную матрицу. Но такое решение будет существенно более трудоёмким.

Вариативная часть

Трек «Математические методы в социологии»

1. Проинтерпретируйте (уровень значимости примите равным 0.1) все коэффициенты регрессионного уравнения. Переменные «Удовлетворенность жизнью», и «Насколько вы счастливы?» измерены по шкале 0...10, где 0 означает наименьшую удовлетворенность/счастье, 10 – максимальную. В качестве контрольной группы взяты лица, никогда не состоявшие в браке.

Рассмотрите полученную информацию с точки зрения дискуссий о роли семьи в современном обществе. Какую ценность имеет данная модель? Какие есть ограничения?

Коэффициенты^{a,b}

Модель	Нестандартизованные коэффициенты		Стандартизованные коэффициенты	t	Знч.
	B	Стд. Ошибка	Бета		
1 (Константа)	2,059	,316		6,513	,000
Возраст (в годах)	-,021	,004	-,184	-4,692	,000
Состоят в официальном браке	-,849	,585	-,039	-1,450	,147
Состоят в гражданском браке	-1,957	1,084	-,048	-1,807	,071
Разведены	-,112	,241	-,013	-,463	,644
Овдовевшие	,787	,238	,125	3,303	,001
Насколько вы счастливы?	,773	,031	,693	24,903	,000

a. Country = Slovenia

b. Зависимая переменная: Удовлетворенность жизнью

2. В таблице ниже представлены расходы на досуговые практики (руб.) 7-ми респондентов и число посещенных ими стран. Изобразите на графике взаимосвязь между данными переменными. Рассчитайте коэффициент корреляции Пирсона и Кенделла для данных переменных и проинтерпретируйте полученные результаты. Что можно сказать о взаимосвязи между расходами на досуг и количеством посещенных стран? Сформулируйте дополнительные гипотезы о взаимоотношении материального благосостояния и пространственной мобильности, на которые предоставленные данные ответа не дают. Каким образом Вы бы проверяли эти гипотезы?

Респондент	1	2	3	4	5	6	7
Расходы на досуг	2000	6000	3500	10000	5000	800	1000
Число стран	0	1	8	9	3	7	2

Трек «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»

Задача 1.

Найдите решение дифференциального уравнения:

$$y'' - y' - 6y = 6x$$

при условии $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Задача 2.

Пусть A – идемпотентная матрица размера $n \times n$ (т.е. $A^2 = A$), I – единичная матрица размера $n \times n$. Вычислить определитель матрицы $(A-I)$.

Задача 3.

Дана функция на языке программирования Python:

```
def recur(n):  
    if n == 0:  
        return 1  
    if n == 1:  
        return -3  
    return -recur(n-1) + 6*recur(n-2)
```

Чему будет равен результат вызова `recur(2018)`? Диапазон определения целых чисел считать неограниченным (т.е., целые числа не переполняются), размер стека также считать неограниченным (т.е. максимальное число рекурсивных вызовов не ограничено).

Задача 4.

Есть 3 источника, генерирующих запросы к серверу. Сервер не имеет накопителя, где запросы могли бы ожидать начала обслуживания. Таким образом, запросы, поступающие в момент, когда сервер занят, теряются. Запросы от источника i поступают согласно пуассоновскому процессу с интенсивностью λ_i , их времена обслуживания распределены экспоненциально (показательно) с параметром μ_i . Предполагая, что все входные пуассоновские процессы и все времена обслуживания независимы между собой, ответить на следующие вопросы.

а) Как распределены длины интервалов времени между обслуживанием очередных запросов (интервалы простоев)? Каково математическое ожидание интервала простоя?

б) Известно, что в текущий момент сервер обслуживает запрос типа 1. Какова вероятность, что следующий запрос, который поступит на обслуживание, будет иметь тип 2?

Трек «Математические методы в экономике»

Демонстрационный вариант по треку размещён отдельно и доступен [по ссылке](#)

Список рекомендуемой литературы для подготовки

Трек «Математические методы в социологии»

1. Крыштановский А.О. Анализ социологических данных с помощью пакета SPSS: учебное пособие для вузов. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007.
2. Bluman A. Elementary statistics. McGraw-Hill, 2008.
3. Радаев В.В. Экономическая социология: учебное пособие для вузов. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005. (плюс позднейшие переиздания)
4. Градосельская Г. В. Сетевые измерения в социологии: Учебное пособие / Под ред. Г. С. Батыгина. М.: Издательский дом «Новый учебник», 2004. — 248 с.

Трек «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.:Факториал Пресс, 2002
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3 томах)
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – М.: Издательство ЛКИ, 2015
4. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие для вузов, Вентцель, Е. С., Овчаров, Л. А., 2000
5. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов, Самарский А. А., 1987

Трек «Математические методы в экономике»

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. «Высшая школа», 1973.
2. Chiang A. Fundamental methods of mathematical economics. 2004.
3. Ланкастер К. Математическая экономика. «Советское радио», 1972.
4. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. «ГУ-ВШЭ», 2005.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, тт.1-3, 2017.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Физматлит. 2005.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Б. П. Демидовича.
8. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
9. Ильин В.А. Линейная алгебра. ФИЗМАТЛИТ, 2010.
10. Магнус Я., Катышев П., Пересецкий А. Введение в эконометрику. М. Дело, 2000.
11. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. М. Юнити, 2002.