

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

**Задание 1 (15 баллов)**

Число  $a*b$  есть произведение  $b$  последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно  $a$  (в частности,  $a*1 = a$ ). Найдите все пары натуральных чисел  $a, b$ , для которых выполнено равенство  $a*b = 2(b*a)$ .

**Задание 2 (15 баллов)**

В параллелограмме ABCD отмечена точка K такая, что  $AB=BK=KC$ . Докажите, что центр параллелограмма равноудален от середин всех сторон треугольника AKD.

**Задание 3 (15 баллов)**

Настойчивый восьмиклассник Вася выписал в ряд 2021 нечётное число  $n_1, n_2, \dots, n_{2021}$ . Затем он построил новый ряд из 2020 чисел по следующему правилу:  $p_1$  получается перемножением всех делителей числа  $n_1$  (в том числе единицы и самого числа) и всех делителей числа  $n_2$ ,  $p_2$  получается перемножением всех делителей числа  $n_2$  и всех делителей числа  $n_3$  и т.д. Вася утверждает, что  $n_1 = 3$ ,  $n_{2021} = 13$ , а у произведения  $p_1 p_2 \dots p_{2020}$  последние четыре цифры – 2021. Стоит ли верить Васе?

**Задание 4 (15 баллов)**

Назовём ход ладьи банальным, если она смещается на кратное трём число клеток. В противном случае назовём ход оригинальным. Может ли ладья обойти поле  $9 \times 9$ , чередуя банальные и оригинальные ходы так, чтобы в каждой клетке ладья побывала ровно один раз?

**Задание 5 (20 баллов)**

Имеется 111 палочек длин 1, 2, 3, ..., 111. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Напоминаем, что «вырожденный треугольник» не является треугольником.

**Задание 6 (20 баллов)**

Натуральное число  $N$  называется интересным, если в системе счисления с основанием  $t$  оно задаётся четырёхзначным числом  $\overline{abcd}$  (то есть,  $N = at^3 + bt^2 + ct + d$ ,  $0 \leq a, b, c, d \leq t-1$ ,  $a \neq 0$ ) таким, что  $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$ . Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом? Ответ, конечно, должен зависеть от числа  $t$ .