Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов – 100

Задание 1 (12 баллов).

В этой задаче запись $x \bmod n$, где x – целое а n – натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n - 1$, что $x - y$ делится на n. Существует ли такая функция f, определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f((x^2 + 1) \bmod 7) = (f(x)^2 + 1) \bmod 11?$$

Задание 2 (17 баллов).

Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\pi/10$ вшэ-коина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число p, причем $1<p<2$. Если цвет вытащенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег – игрок получит назад px денег, если не совпадает – не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 3 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

Задание 3 (23 балла).

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC касается вписанной и соответствующей вневписанной окружностей в точках T_1, T_2 соответственно. Окружность, проходящая через середины сторон, касается этих же окружностей в точках S_1, S_2 соответственно. Докажите, что $\angle S_1CT_1=\angle S_2CT_2$.

Задание 4 (32 балла).

Найдите все действительные числа d, для которых существуют многочлены от одной переменной P и Q, такие что равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

выполняется при всех значениях x кроме конечного числа.

Задание 5 (42 балла).

Через $X(\alpha)$ будем обозначать точку с координатами ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$) (все такие лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Выбрали произвольный угол ϕ и провели хорды $P(\phi)P(2022\phi)$, $P(2022\phi)P(2022^2\phi)$,… (на шаге номер n проводится хорда $P(2022^{n-1}\phi)P(2022^n\phi)$). Если хорда уже была проведена – она не проводится второй раз. Оказалось, что все проведенные хорды не пересекаются иначе чем по концам. Докажите, что всего проведено конечное число хорд.

Задание 6 (50 баллов).

Фокусник и его Ассистент готовятся показать следующий фокус. Фокуснику завяжут глаза, после чего один из зрителей напишет на доске 60-битное слово (последовательность из 60 нулей и единиц). Ассистент уверен, что сможет незаметно передать фокуснику записку, содержащую 44 бита (не обязательно биты загаданного слова, может написать какие хочет). После чего Фокусник должен будет назвать слово. Для какого наибольшего числа C Фокусник и Ассистент могут придумать стратегию, позволяющую всегда назвать слово, совпавшее хотя бы в C битах с написанным зрителем.