Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.
Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

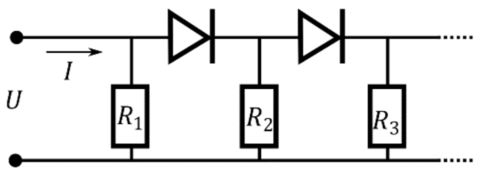
Максимальное количество баллов — 100.

Задача 1. Большой по площади водоём с плоским дном заполен водой глубины d. Далеко от его краёв находится вертикально расположенная труба, выходящая из дна. Верхний конец трубы запаян и находится вровень с водной поверхностью. Диаметр трубы мал по сравнению с её длиной. Через нижний конец трубы в неё подаётся насосом вода, которая вытекает из отверстий, проделанных на её боковой поверхности. Отверстия распределены таким образом, что вода из трубы вытекает во все стороны и по всей её длине с одинаковой интенсивностью. Полный расход жидкости (объём в единицу времени) равен Q.

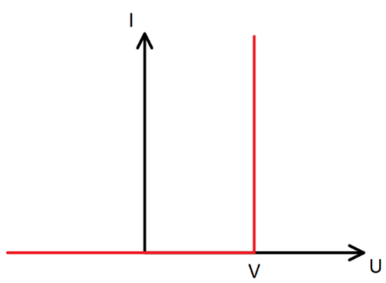
1) На поверхность жидкости на расстоянии r от оси трубы упало лёгкое семечко тополя, после чего оно стало, оставаясь на поверхности, переноситься жидкостью вдоль прямой, проходящей через ось трубы. Найдите зависимость координаты этого семечка от времени.
2) Найдите слабое отклонение формы поверхности жидкости от горизонтальной плоскости.

Считайте, что течение жидкости постоянно во времени, влияние вязкости на распределение течения в пространстве пренебрежимо мало. Число Фруда, определяемое как максимальный угол наклона поверхности в радианах, мало, так что пункт 1) следует решать, приняв поверхность жидкости идеально плоской. Ускорение свободного падения равно g.

Задача 2. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изобар и двух изохор. Определите какой максимальный кпд возможен у данной машины, если отношение максимальной к минимальной температуре равно 4. В качестве рабочего газа используется гелий.



Задача 3. Бесконечная линия состоит из идеальных диодов с напряжением открытия, равным V (вольт-амперная характеристика диода представлена на рисунке), а также резисторов с сопротивлением $R_n = R/n$, где n – номер звена линии, смотри Рисунок. Найдите вольт-амперную характеристику всей цепи. Какой приближённой формулой её можно описать при больших напряжениях $U \gg V$?



Задача 4. В далеком 1958 году маленький воробей пролетал над военной базой в Китае. Местные жители решили избавиться от «вредителя» с помощью старинной пушки. Воробей увидел, как из пушки вылетело ядро. Направление скорости ядра к горизонту в момент выстрела он определил равным $\alpha = 45°$. Ровно через $t_1 = 2\,c$ он услышал оглушающий хлопок. Если бы он не сменил вовремя траекторию, то через $t_2 = 10\,c$ снаряд поразил бы его. Определите, с какой скоростью вылетел снаряд из пушки, и на каком расстоянии он приземлился. Считать, что воробей летел строго параллельно горизонту по направлению к пушке с постоянной скоростью $V = 46$ км/ч. Ускорение свободного падения $g = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, скорость распространения звука в воздухе $c = 330\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Задача 5. Для определения значения ускорения свободного падения g проводилось измерение параметров траектории движения круглого шара диаметром $R = 10$ см, который подбрасывался вертикально вверх на высоту около $H_0 = 6$ метров. Измерялось время T пролёта шара вверх до точки остановки и высота H, на которую шар поднялся за время T; измерение величин H и T можно считать абсолютно точным.

Однако оказалось, что эксперименты с железным шаром и с резиновым мячиком в качестве шара того же размера дают немного отличающиеся значения константы g. Оцените погрешность измерения g для обоих экспериментов, возникающую вследствие сопротивления воздуха. *Указание:* на релевантных скоростях движения следует считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шара. Для справки, динамическая вязкость воздуха $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$Па $\cdot$ с.

10 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задачи, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Большой по площади водоём с плоским дном заполен водой глубины d. Далеко от его краёв находится вертикально расположенная труба, выходящая из дна. Верхний конец трубы запаян и находится вровень с водной поверхностью. Диаметр трубы мал по сравнению с её длиной. Через нижний конец трубы в неё подаётся насосом вода, которая вытекает из отверстий, проделанных на её боковой поверхности. Отверстия распределены таким образом, что вода из трубы вытекает во все стороны и по всей её длине с одинаковой интенсивностью. Полный расход жидкости (объём в единицу времени) равен Q.

1) На поверхность жидкости на расстоянии r от оси трубы упало лёгкое семечко тополя, после чего оно стало, оставаясь на поверхности, переноситься жидкостью вдоль прямой, проходящей через ось трубы. Найдите зависимость координаты этого семечка от времени.
2) Найдите слабое отклонение формы поверхности жидкости от горизонтальной плоскости.

Считайте, что течение жидкости постоянно во времени, влияние вязкости на распределение течения в пространстве пренебрежимо мало. Число Фруда, определяемое как максимальный угол наклона поверхности в радианах, мало, так что пункт 1) следует решать, приняв поверхность жидкости идеально плоской. Ускорение свободного падения равно g.

Решение: 1) Окружим трубу воображаемым цилиндром с высотой, равной глубине водоёма, и осью, совпадающей с трубой. По условиям задачи скорость воды в каждой точке водоёма направлена вдоль радиуса цилиндра и зависит только от расстояния от рассматриваемой точки до оси, то есть не зависит от расстояния до дна и от угла поворота вокруг оси.

$$v(x,y,z) = v(r) \tag{1}$$

Рассмотрим точку, находящуюся на расстоянии r и цилиндр такого же радиуса. Скорость на каждой точке боковой грани этого цилиндра равна по модулю $v(r)$. Найдём эту скорость из закона сохранения массы. Масса, которая поступает в этот цилиндр из внешнего источника через трубу за время Δt равна $Q\rho\Delta t$, где ρ – плотность жидкости. Так как жидкость несжимаема, плотность воды одна и та же в любой точке водоёма. Масса, втекающая в цилиндр через трубу, равна массе воды, вытекающей через боковую поверхность цилиндра. Из этого условия получаем равенство

$$Q\rho\Delta t = d2\pi r\, v(r)\, \Delta \mathrm{t}\, \rho \tag{2}$$

Откуда получаем зависимость скорости жидкости от расстояния до трубы

$$v(r) = \frac{Q}{2\pi d r} \tag{3}$$

Найдём теперь закон движения семечка, упавшего в начальный момент на жидкость на расстоянии R от трубы. Перепишем уравнение (3) немного по-другому, используя определение мгновенной скорости $v(r) = \frac{dr}{dt}$

$$\frac{2\pi d}{Q} r = \frac{dt}{dr} \tag{4}$$

Из уравнения (4) легко получить зависимость $t(r)$, увидев, что данное уравнение является полным аналогом уравнения движения с постоянным ускорением $v = \frac{dx}{dt} = at$. Таким образом, решением уравнения (4) является зависимость

$$t(r) = t_0 + \frac{\pi d}{Q} r^2 \tag{5}$$

Из этой зависимости легко получить зависимость $r(t)$:

$$r(t) = \sqrt{\frac{(t - t_0)Q}{\pi\, d}} \tag{6}$$

Постоянную t_0 находим из начального условия $r(0) = R$ и получаем ответ – зависимость расстояния семечка от времени:

$$r(t) = \sqrt{\frac{t\, Q}{\pi\, d} + R^2} \tag{7}$$

Движется оно всё время вдоль радиуса нашего воображаемого цилиндра.

2) Рассмотрим узкую трубку тока жидкости у поверхности водоёма.

На поверхности жидкости не происходит скачка давления, то есть давление жидкости p сразу под поверхностью равно атмосферному. Если бы равенства давлений жидкости и воздуха по обе стороны от поверхности жидкости достигнуто бы не было, то элемент поверхности жидкости должен был бы начать смещаться по нормали к поверхности. Однако течение у поверхности направлено всегда по касательной к поверхности.

Для того, чтоб определить форму трубки, запишем для трубки тока уравнение Бернулли:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2(r) + \rho g h(r) \ = \ p + \rho g d \tag{8}$$

Левая часть равенства записана для точки тока, находящейся на расстоянии r от трубы, а правая для бесконечно удалённой точки: в ней уровень воды равен данной глубине водоёма $h = d$, а скорость течения равна нулю. Таким образом, форма поверхности

$$h - d = \ -\frac{Q^2}{8\pi^2 d^2 g} \frac{1}{r^2}. \tag{9}$$

Заметим, что при отдалении от трубы уровень жидкости повышается к значению $h = d$.

Разбалловка.

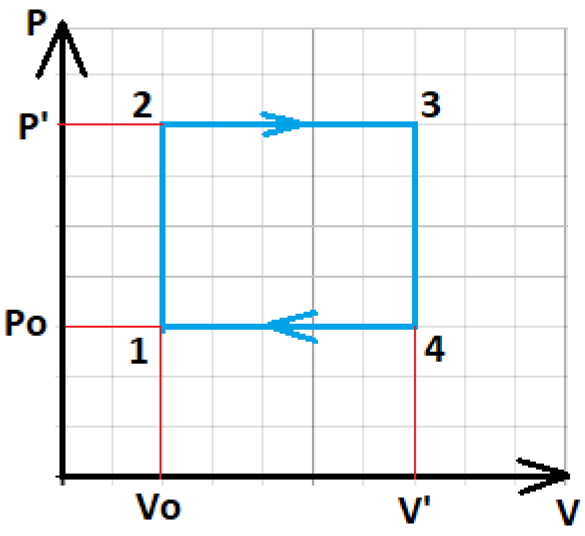
Найдено распределение скорости жидкости по её объёму	6 баллов

Использована связь скорости семечка и скорости жидкости	2 балла
Правильно найдена зависимость координаты семечка от времени	3 балла
Указан способ связи высоты жидкости и скорости течения (записано уравнение Бернулли)	4 балла
Найдена верная форма поверхности жидкости	5 баллов

Задача 2.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изобар и двух изохор. Определите какой максимальный кпд возможен у данной машины, если отношение максимальной к минимальной температуре равно 4. В качестве рабочего газа используется гелий.

Решение. Изобразим цикл данной машины в P-V координатах:



Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для максимальной и минимальной температуры:

$$P_0V_0 = \nu RT_0, \qquad P'V' = \nu RT'$$

Выразим работу в данном цикле:

$$A = (P' - P_0)(V' - V_0) = P'V' - P_0V' - P'V_0 + P_0V_0$$

$$= \nu RT' - \nu RT_0\frac{V'}{V_0} - \nu RT'^{\frac{V_0}{V'}} + \nu RT_0 = \nu RT'\left(1 - \frac{V_0}{V'}\right) + \nu RT_0\left(1 - \frac{V'}{V_0}\right)$$

Теперь выразим количество получаемой теплоты в данном цикле:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + A_{23} + \Delta U_{23} = \Delta U_{13} + A_{23} = \frac{i}{2}\nu R(T' - T_0) + P'(V' - V_0)$$
$$= \frac{3}{2}\nu R(T' - T_0) + \nu RT' - \nu RT'^{\frac{V_0}{V'}} = \nu RT'\left(\frac{5}{2} - \frac{V_0}{V'}\right) - \frac{3}{2}\nu RT_0$$

Получаем, что КПД:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\nu RT'\left(1 - \frac{V_0}{V'}\right) + \nu RT_0\left(1 - \frac{V'}{V_0}\right)}{\nu RT'\left(\frac{5}{2} - \frac{V_0}{V'}\right) - \frac{3}{2}\nu RT_0} = \frac{T'\left(1 - \frac{V_0}{V'}\right) + T_0\left(1 - \frac{V'}{V_0}\right)}{T'\left(\frac{5}{2} - \frac{V_0}{V'}\right) - \frac{3}{2}T_0}$$

Введем обозначение $x = \frac{V'}{V_0}$ и $k = \frac{T'}{T_0}$ тогда:

$$\eta = \frac{k\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 1 - x}{k\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{x}\right) - \frac{3}{2}}$$

Максимум этой функции по параметру x можно найти любым способом (например, взятием производной или упрощением выражение и применением неравенства Коши).

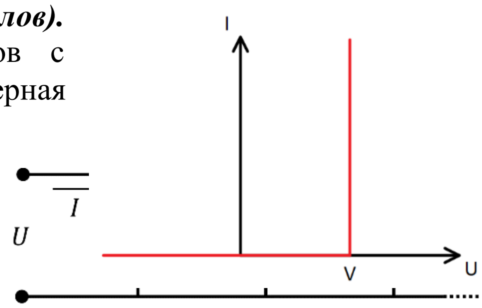
Максимум КПД $\eta = 0.16$ получается при $x = 1.84$.

Разбалловка.

Указано, в каких точках цикла достигается максимальная и минимальная температура	***3 балла***
Записана работа газа за цикл или полная теплота, поглощённая газом за цикл	***3 балла***
Записано выражение для КПД, зависящее только от отношения максимальной к минимальной температур и от отношение максимального и минимального объёма газа за цикл	***5 баллов***
Найдено максимальное значение КПД	***9 баллов***

Задача 3. Электричество.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич, 20 баллов). Бесконечная линия состоит из идеальных диодов с напряжением открытия, равным V (вольт-амперная характеристика диода представлена на рисунке), а также резисторов с сопротивлением $R_n = R/n$, где n – номер звена линии, смотри Рисунок. Найдите вольт-амперную характеристику всей цепи. Какой приближённой формулой её можно описать при больших напряжениях $U \gg V$?



Решение. Полный ток, протекающий через цепь, равен сумме токов I_n, которые протекают через звенья линии. Напряжение на резисторе № n равно $U_n = U - (n-1)V$. Таким образом,

$$I = \sum I_n = \sum \frac{U_n}{R_n} = \frac{1}{R} \sum n(U - (n-1)V). \tag{1}$$

В уравнении (1) суммирование надо производить с $n = 1$ до $n = N$, где целое N определяется неравенствами

$$\frac{U}{V} < N < \frac{U}{V} + 1. \tag{2}$$

Что можно переписать как

$$N = \left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil \tag{3}$$

Где функция $\lceil x \rceil$ округляет x до ближайшего целого вверх.

Пользуемся следующими формулами для суммирования:

$$\sum_1^N n = \sum_0^N n = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_1^N n^2 = \sum_0^N n^2 = \frac{N(N+1)(N+1/2)}{3}, \tag{4}$$

И получаем из уравнения (1) с подстановкой N из формулы (3) значение вольт-амперной характеристики данной схемы:

$$I = \frac{V}{6R}(1 + \left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil)(2 + \left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil)(\frac{3U}{V} - 2\left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil) \tag{5}$$

При $U \gg V$ можно положить $\lceil U/V \rceil = U/V$ и пренебречь членами порядка единицы около U/V (так как $U/V \gg 1$) , так что вольт-амперной характеристикой для больших напряжений будет следующее выражение:

$$I = \frac{U^3}{6RV^2} \tag{6}$$

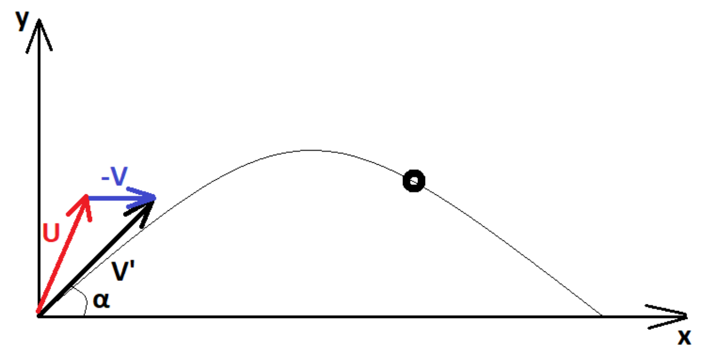
Верно определено напряжение на каждом резисторе	5 баллов
Записан ток через систему в виде суммы	2 балла
Правильно расставлены пределы суммы	3 балла
Правильно подсчитана сумма n	3 балла
Правильно подсчитана сумма n^2	3 балла
Получен верный ответ для вольт-амперной характеристики схемы (в любом виде без суммы)	4 баллов
Получен верный ответ для вольт-амперной характеристики при большом напряжении	4 баллов

Задача 4. Кинематика

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (20 баллов). В далеком 1958 году маленький воробей пролетал над военной базой в Китае. Местные жители решили избавиться от «вредителя» с помощью старинной пушки. Воробей увидел, как из пушки вылетело ядро. Направление скорости ядра к горизонту в момент выстрела он определил равным $\alpha = 45°$. Ровно через $t_1 = 2\,c$ он услышал оглушающий хлопок. Если бы он не сменил вовремя траекторию, то через $t_2 = 10\,c$ снаряд поразил бы его. Определите, с какой скоростью вылетел снаряд из пушки, и на каком расстоянии он приземлился. Считать, что воробей летел строго параллельно горизонту по направлению к пушке с постоянной скоростью $V = 46$ км/ч. Ускорение свободного падения $g = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, скорость распространения звука в воздухе $c = 330\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Решение. Первое, что необходимо указать в решении, что воробей является движущейся системой отсчета, поэтому значения и направления скоростей, которые он наблюдают – являются относительными.

Можно рассмотреть задачу в системе отсчета воробья, где он покоится на месте, а на него летит ядро:



Получаем относительную скорость: $\vec{V'} = \overrightarrow{V_{\text{СОБ}}} - \overrightarrow{V_{\text{СО}}} = \vec{U} - \vec{V}$, где $\vec{U}$ – начальная скорость ядра, $\vec{V}$ – скорость воробья, $\vec{V'}$ - скорость, которую наблюдает воробей.

В данной системе отсчета все формулы баллистики будут справедливы для начальной скорости V', в частности зависимость координат от времени:

$$x(t) = V' \cos\alpha \cdot t$$

$$y(t) = V' \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

В условии сказано, что воробей услышал звук выстрела из пушки через время t_1, значит расстояние от пушки до воробья можно выразить, как расстояние, которое преодолевает звук за данное время. Т.к. скорость воробья много меньше скорости звука, то можно пренебречь изменением скорости звука при переходе в данную систему координат.

$$L = c\,t_1 = \sqrt{x^2(t_2) + y^2(t_2)}$$

$$(c\,t_1)^2 = (V' \cos\alpha \cdot t_2)^2 + \left(V' \sin\alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2}\right)^2$$

$$V' = \frac{gt_2^3 \sin\alpha + \sqrt{(gt_2^3 \sin\alpha)^2 - (g^2 t_2^4 - 4c^2 t_1^2)t_2^2}}{2t_2^2} = 91{,}1\ \text{м/с}$$

Теперь свяжем относительную и собственную скорость через проекции:

$$V'_x = V' \cos\alpha = U_x + V$$
$$V'_y = V' \sin\alpha = U_y$$

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} = \sqrt{(V' \cos\alpha - V)^2 + (V' \sin\alpha)^2} = 82{,}5 \text{ м/с}$$

Теперь найдём на каком расстоянии приземлится ядро от пушки. В данной системе отсчета вектор н соответствует $\vec{U}$:

$$t_{\text{полета}} = \frac{2U_y}{g}$$
$$L = U_x \cdot t_{\text{полета}} = \frac{2U_x U_y}{g} = \frac{2(V' \cos\alpha - V) \cdot V' \sin\alpha}{g} = 665 \text{ м}$$

Разбалловка.

Указан переход в систему отсчёта воробья	***2 балла***
Правильно посчитана начальная скорость ядра в системе отсчёта воробья (или эта скорость в решении не используется)	***8 баллов***
Правильно посчитана начальная скорость ядра в системе отсчёта земли	***5 баллов***
Правильно получено значение дальности полёта ядра	***5 баллов***

Задача 5. Задача-оценка

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Для определения значения ускорения свободного падения g проводилось измерение параметров траектории движения круглого шара диаметром $R = 10$ см, который подбрасывался вертикально вверх на высоту около $H_0 =$ 6 метров. Измерялось время T пролёта шара вверх до точки остановки и высота H, на которую шар поднялся за время T; измерение величин H и T можно считать абсолютно точным.

Однако оказалось, что эксперименты с железным шаром и с резиновым мячиком в качестве шара того же размера дают немного отличающиеся значения константы g. Оцените погрешность измерения g для обоих экспериментов, возникающую вследствие сопротивления воздуха. *Указание:* на релевантных скоростях движения следует считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шара. Для справки, динамическая вязкость воздуха $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$Па $\cdot$ с.

Решение. Введём ось y, направленную вверх с нулём на уровне подбрасывания шарика. Запишем уравнение движения для шарика (оно справедливо пока скорость шарика направлена вверх):

$$m\ddot{y} = -mg - \beta\dot{y}^2 \qquad (1)$$

Тут β – пока неизвестный коэффициент пропорциональности между силой и квадратом скорости. Попробуем оценить его методом размерностей.

Этот коэффициент должен зависеть от геометрии шарика и от свойств воздуха. В нашей задаче всего три параметра, от которых может зависеть этот коэффициент: плотность воздуха (чем плотнее воздух, тем, кажется на первый взгляд, сложнее через него лететь), вязкость воздуха (чем больше коэффициент вязкости, тем больше сила сопротивления) и размер шарика (у большего шарика большая сила сопротивления, так как он взаимодействует с большей площадью и объёмом воздуха).

Таким образом, $\beta = \beta(R, \eta, \rho)$. Размерность коэффициента, с одной стороны, восстанавливается из уравнения (1) – его произведение с квадратом скорости имеет размерность силы. С другой стороны, размерность коэффициента получается перемножением размерностей (в соответствующих степенях) параметров, от которых он зависит. Мы заранее не знаем, как выражается β через параметры (R, η, ρ), поэтому положим, что $\beta \sim R^\alpha \cdot \eta^\gamma \cdot \rho^\delta$. Тогда для размерностей будет следующее соотношение:

$$[\beta] = [R]^\alpha [\eta]^\gamma [\rho]^\delta \qquad (2)$$

Восстанавливая размерность β из выражения (1) и подставляя размерности остальных величин в выражение (2), получаем:

$$[\text{кг/м}] = [\text{м}]^\alpha \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}\right]^\gamma \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right]^\delta \qquad (3)$$

Так как в нашей системе единиц единицы кг, м и с независимы друг от друга, мы можем из уравнения (3) составить 3 уравнения, приравнивая степени перед кг, м и с соответственно в левой и правой частях уравнения. Тогда мы получим

$$\begin{cases} 1 = \gamma + \delta \\ -1 = \alpha - \gamma - 3\delta \\ 0 = -\gamma \end{cases} \qquad (4)$$

Решая эту систему, получаем коэффициенты

$$\begin{cases} \delta = 1 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases} \qquad (5)$$

То есть уравнение движения перепишется в виде

$$m\ddot{y} = -mg - C\, R^2 \rho\, \dot{y}^2 \qquad (6)$$

Где C – некоторая константа порядка единицы, которую мы не можем получить методом размерностей.

Поделим уравнение (6) на массу шарика, посчитанную как объём, помноженный на плотность шарика. Числовую константу $4/3\,\pi$, которая порядка единицы, мы писать не будем, потому что это не добавит точности ответу: все константы порядка единицы “сидят” внутри константы C.

$$\ddot{y} = -g - C \frac{\rho}{R\rho_{\text{шара}}}\, \dot{y}^2 \qquad (7)$$

Из уравнения (7) видно, что неточность измерения ускорения свободного падения будет порядка $\frac{\rho}{R\rho_{\text{шара}}} V^2$, где V – некоторая характерная скорость движения шара. Положим её равной начальной скорости движения, которую можно получить из высоты подъёма в высшую точку: $V = \sqrt{2gH}$ (двойкой в конечном ответе тоже, конечно, пренебрежём). Для подсчёта ответа возьмём $R = 0.1$ м, $H = 6$ м, $g = 10$ м/с^2, $\rho = 1$ кг/м^3, $\rho_{\text{шара}} = 10\,000$ кг/м^3 :

$$\Delta g \approx \frac{\rho}{R\,\rho_{\text{шара}}} gH \approx 0.1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \qquad (8)$$

Записано уравнение движения шарика с учётом силы сопротивления воздуха	2 балла
Указаны все параметры задачи, от которых зависит сила сопротивления	3 балла
Составлена система линейных уравнений, связывающая размерности величин, от которых зависит сила сопротивления	4 балла
Получена верная зависимость силы сопротивления от параметров задачи	2 балла
Записана оценка отклонения измеренного ускорения свободного падения от действительного, как характерная сила сопротивления, делённая на массу шара	5 балла
Взяты разумные значения физических величин в задаче	2 балла
Получен верный порядок ответа	1 балл