

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

**Факультет Математики**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ДЕМОНСТРАЦИОННАЯ ВЕРСИЯ  
олимпиады студентов и выпускников «Высшая лига» по направлению  
«Математика»**

**Москва, 2022 год**

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ УЧАСТНИКАМ ОЛИМПИАДЫ

**Направление: «160.Математика»**

**Треки: «Математика», код – 160.1; «Математическая физика», код – 160.2**

Олимпиада “Высшая лига” по направлению “Математика” призвана выявить наиболее подготовленных выпускников и студентов математических специальностей, а также даёт возможность поступить вне конкурса на магистерские программы факультета математики. Олимпиада проводится в два этапа.

### ПЕРВЫЙ (ОТБОРОЧНЫЙ) ЭТАП

Задание первого (отборочного) этапа включает 10 тестовых вопросов с численными ответами. Ответы проверяются автоматически. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается в 10 баллов. В сумме участник может набрать 100 баллов. Продолжительность первого этапа – 120 минут.

### ВТОРОЙ (ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ) ЭТАП

Задания второго (заключительного) этапа состоят из инвариантной и вариативной частей. Вариант олимпиады состоит из 8 задач: 4 задачи общей (инвариантной) части и по две задачи специальных (вариативных) частей по трекам “Математика” и “Математическая физика”.

Стоимость каждой задачи в баллах указана будет указана в варианте олимпиады. Суммарно можно набрать 100 баллов. Если сумма баллов больше 100, то результат приравнивается к 100 баллам.

При подведении итогов по направлению учитываются шесть лучших задач. При подведении итогов по треку шесть задач – 4 из инвариантной части и 2 из вариативной части выбранного трека.

Задачи можно решать и записывать в любом порядке. Черновики тоже проверяются. Использование каких бы то ни было справочных материалов, в том числе размещенных в интернете, строго запрещено, равно как и всякое общение участников олимпиады друг с другом.

### ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ

Выбор трека олимпиады (“математика” или “математическая физика”), **не ограничивает** последующий выбор специализации в магистратуре: например, можно решать спецчасть “Математика”, но в магистратуре (в случае успешного поступления) выбрать специализацию “Математическая физика”, и наоборот. Также не зависит от выбора специальной части олимпиады возможность поступления в совместную магистратуру с Центром педагогического мастерства.

Подробные условия поступления победителей и призёров олимпиады доступны на сайте <https://ma.hse.ru/>.

## ТЕМАТИКА ЗАДАНИЙ

### Общая часть

- Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки, мультиномиальные коэффициенты) и основы теории вероятностей (независимость событий и случайных величин, условные вероятности, математическое ожидание, дисперсия).
- Элементарная алгебра: поле комплексных чисел, формальные степенные ряды и многочлены, выражение симметрических функций от корней многочлена через его коэффициенты, а коэффициентов — через корни, полиномиальная интерполяция, кратные корни, алгоритм Евклида для многочленов, разложение рациональной функции на простейшие дроби и в степенной ряд, экспонента и логарифм.
- Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, решение систем линейных уравнений, определители, характеристический и минимальный многочлены матрицы, тождество Гамильтона – Кэли, собственные числа и собственные векторы, жорданова нормальная форма комплексной матрицы, вычисление аналитических функций от матриц и операторов, билинейные и квадратичные формы, ортогонализация, индекс вещественной квадратичной формы.
- Евклидова геометрия пространства  $\mathbb{R}^n$ : расстояние от точки до подпространства, углы между прямыми и гиперплоскостями, евклидов объём параллелепипеда и симплекса.
- Одномерный и многомерный вещественный анализ: пределы последовательностей и функций, числовые и функциональные ряды, ряд Тейлора, свойства непрерывных функций, дифференциал отображения  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , производные сложных и неявных функций, отыскание условных и безусловных экстремумов, определённый интеграл, сведение многомерных интегралов к повторным одномерным, несобственные интегралы, вычисление длины кривой и площади поверхности с помощью интегрирования.
- Основы комплексного анализа: комплексная производная функции  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , голоморфные и мероморфные функции, интеграл Коши, теорема о вычетах, вычисление интегралов (включая неопределённые) при помощи вычетов.
- Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения, элементарные приёмы интегрирования (разделение переменных, однородные уравнения, линейные уравнения первого и второго порядка, уравнения в дифференциалах, интегрирующий множитель), системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, уравнения с частными производными первого порядка, метод характеристик.
- Элементы теории групп: подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, фактор группы, прямое произведение групп, симметрические группы, знак и цикловой тип перестановки, группы симметрий геометрических фигур, матричные группы Ли  $GL_n$ ,  $SL_n$ ,  $SO_n$ ,  $SU_n$ .

## Трек “Математика”

- Элементы коммутативной алгебры: коммутативные кольца и их гомоморфизмы, идеалы и фактор кольца, кольца вычетов и китайская теорема об остатках, классификация конечно порождённых абелевых групп, факториальность кольца многочленов от многих переменных, поля и гомоморфизмы полей, характеристика, простые расширения полей, описание и примеры конечных полей.
- Элементы геометрии: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, взаимное расположение проективных и аффинных подпространств, выпуклые фигуры в  $\mathbb{R}^n$ , опорное полупространство, аффинные и проективные кривые и поверхности второго порядка (квадрики и коники).
- Элементы некоммутативной алгебры: ассоциативные кольца и алгебры, модули над ними, неприводимость и лемма Шура, полная приводимость комплексных линейных представлений конечной группы, неприводимые представления групп  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $A_4$ .
- Элементы топологии: открытые, замкнутые и компактные подмножества в  $\mathbb{R}^n$ , всюду плотные и нигде не плотные множества, топологические пространства, компактность, связность, внутренность и замыкание, непрерывные отображения, гомотопии, триангуляции, накрытия, фундаментальная группа.
- Элементы функционального анализа: мера и интеграл Лебега в  $\mathbb{R}^n$ , теорема Фубини, равномерная непрерывность и равномерная сходимости непрерывных функций, примеры бесконечномерных топологических, нормированных и гильбертовых векторных пространств (пространства непрерывных, суммируемых и суммируемых с квадратом функций на компакте, на  $\mathbb{R}^n$  и на торе).

## Трек “Математическая физика”

- Основы классической механики: законы Ньютона, условия потенциальности силы, работа силы вдоль траектории, лагранжиан и уравнения движения (уравнения Эйлера–Лагранжа) для механической системы в поле потенциальных сил, симметрии и законы сохранения (теорема Нётер), Гамильтоновы уравнения движения, скобки Пуассона, канонические преобразования.
- Классическая электродинамика: закон Кулона, поле и потенциал, поля и энергия взаимодействия простейших конфигураций зарядов (сферы, плоскости, точечные заряды), движение заряженной частицы в однородном магнитном и электрическом поле, сила Лоренца, уравнения Максвелла, связь потенциала и стационарной плотности распределения заряда (уравнение Пуассона).

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевск: РХД, 2000.
- В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М: Фазис, 1999.
- Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.
- О. Я. Виро, О. А. Иванов, В. М. Харламов, Н. Ю. Нецветаев, *Элементарная топология*, СПГУ, 2007.
- И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М: Наука 1971.
- А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,  
<http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf>,  
[http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2\\_2015.VI.15.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf).
- А. Л. Городенцев, *Геометрия*,  
[http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_total.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf).
- В. А. Зорич, *Математический анализ*, М: МЦНМО, 2007
- А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.
- М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, М: Наука, 1973.
- В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.
- В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Едиториал УРСС, 2004.
- В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения, Том 1*, М.: Мир, 1967
- Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Лань, 2004.
- В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М: Наука, 1979.
- Г. Голдстейн, *Классическая механика*, М., Наука, 1974.
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, М: Физматлит, 2004.
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М: Физматлит, 2004.

ОЛИМПИАДА НИУ ВШЭ ДЛЯ СТУДЕНТОВ И ВЫПУСКНИКОВ “ВЫСШАЯ ЛИГА”  
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ 2021

Направление: «160.Математика»

Треки:

160.1 «Математика»

160.2 «Математическая физика»

Время выполнения задания — 210 минут

**ОБЩАЯ (ИНВАРИАНТНАЯ) ЧАСТЬ**

1. [18 баллов] Шесть одинаковых монет лежат в вершинах правильного шестиугольника, касаясь друг друга. Седьмая такая же монета катится без скольжения по внешней стороне этих, касаясь их по очереди. Сколько оборотов сделает эта монета, вернувшись в исходное положение?

2. [18 баллов] Придумайте некоммутативную группу с нечетным количеством элементов.

3. [18 баллов] Может ли множество всех движений плоскости, переводящих данный многоугольник в себя, состоять из

- a) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 2017 меняющих ориентацию;
- b) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 1720 меняющих ориентацию;
- c) только из 2017 сохраняющих ориентацию движений?

4. [18 баллов] Существует ли функция  $f$ , аналитическая на всей комплексной плоскости, такая что  $f(z)^3 = 1 + e^z$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ ?

**СПЕЦИАЛЬНАЯ (ВАРИАТИВНАЯ) ЧАСТЬ**

**Трек «Математика»**

**M1.** [24 балла] В двумерном пространстве сила притяжения между точечными массами обратно пропорциональна расстоянию между ними. Докажите, что любая система из 100 закрепленных точечных масс в двумерном пространстве будет иметь меньше 100 точек равновесия (то есть таких точек, в которых силы притяжения этих точечных масс уравновешиваются).

**M2.** [24 балла] Дано число  $0 < C < 1$ . В отрезке  $[0,1]$  дана последовательность компактов с мерами не менее  $C$ . Верно ли, что всегда в ней найдется подпоследовательность, пересечение которой имеет положительную меру?

## Трек «Математическая физика»

**Ф1.** [24 балла] Гладкий жесткий стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг фиксированной вертикальной оси по заданному закону  $\varphi(t)$ , где угол  $\varphi$  отсчитывается от некоторого направления в плоскости вращения стержня. По стержню без трения может скользить материальная точка массы  $m$ .

- Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.
- Приведите формулы для всех интегралов движения (если они есть).
- Найдите зависимость от времени модуля силы реакции стержня при его равномерном вращении:  $\dot{\varphi}(t) = \omega = \text{const}$ .

**Ф2.** [24 балла] Одномерный гармонический осциллятор задается гамильтонианом

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

- Считая начальные данные  $q_0$  и  $p_0$  канонически сопряженными переменными со скобкой Пуассона

$$\{q_0, p_0\} = 1,$$

докажите, что решения уравнений движения  $q(t)$  и  $p(t)$  в любой момент времени тоже образуют пару канонически сопряженных величин:

$$\{q(t), p(t)\}_{q_0, p_0} = 1.$$

- Найдите производящую функцию первого рода  $F_1(q_0, q(t), t)$ , отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции

$$(q_0, p_0) \rightarrow (q(t), p(t)).$$

- Найдите производящую функцию второго рода  $F_2(q_0, p(t), t)$ , отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции.

## КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи оцениваются согласно следующим общим критериям:

- 100% баллов за задачу – дано полное решение задачи;
- порядка 75% баллов за задачу – дано решение задачи с пробелами технического характера(т.е. связанными с владением техникой в предметной области задачи);
- порядка 50% баллов за задачу – в решении задачи получены значительные продвижения,но имеются концептуальные пробелы (т.е. связанные с владением понятийным аппаратом в предметной области задачи);
- порядка 25% баллов за задачу – попытка решения в целом не успешна, но содержит верные соображения;
- до 25% баллов за задачу может сниматься за арифметические ошибки, не меняющие ход решения, за некорректное использование математических обозначений за другие недочеты, не связанные с содержательной частью решения;
- Ответ, приведенный без обоснования, оценивается в 0 баллов, вне зависимости оттого, верный он или нет.



## ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ЗАГРУЖАЕМЫМ ФАЙЛАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ

- а) Листы с решениями должны сканироваться или фотографироваться в полную величину, качество изображения должно быть таким, чтобы текст комфортно читался с экрана 12-дюймового монитора, а размер загружаемых файлов был не слишком велик (при правильных настройках сканера/камеры и некоторой сноровке можно легко уложиться в 1 – 5 Мб на страницу).
- б) Изображения должны сохраняться на компьютере в формате jpeg или pdf и загружаться в экзаменационную систему в виде файлов с расширениями .jpg, .jpeg или .pdf.
- в) Изображение в загружаемом файле должно быть ориентировано так, чтобы прочтение текста не требовало поворота кадра на 90 или 180 градусов.
- г) В случае, если Вы фотографируете решения, следите за тем, чтобы
  - плоскость камеры была строго параллельна плоскости листа
  - объектив располагался над листом строго по центру
  - в кадре не было перспективных искажений и больших бессодержательных полей за краями листа
  - никакие куски текста не остались за кадром.

Сначала убедитесь, что всё именно так, и только после этого нажимайте на спуск затвора. Если это позволяет Ваша камера, мы рекомендуем располагать объектив в 60 – 90 см над лежащим на столе листом и использовать зум, чтобы максимально эффективно вписать лист в кадр.

- д) Перед отправкой снимков или сканов на сайт убедитесь на экране своего монитора, что Ваши файлы удовлетворяют предыдущим требованиям (а – в) и при необходимости скорректируйте их (например, поверните изображение или смените расширение файла, если это необходимо).
- е) Выполнение настоящих требований является зоной ответственности участника. В случае, если загруженные изображения им не удовлетворяют, работа может быть аннулирована.