

Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Математика» состоит из двух частей:

Инвариантная часть представлена заданиями № 1–4. Их нужно выполнить всем участникам.

Вариативная часть разделена на треки:

- Трек «Математика»: задания № М1–М2
- Трек «Математическая физика»: задания № Ф1–Ф2

Стоимость каждой задачи указана возле задачи. При подведении итогов **по направлению** учитываются **шесть лучших задач из восьми**, при подведении итогов по трекам «Математика» и «Математическая физика» – шесть задач: **четыре из инвариантной части и две из выбранного трека**. Суммарно можно набрать не более 100 баллов. Если сумма баллов за задачи больше 100, то результат приравнивается к 100 баллам.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться решить наилучшим образом любые из представленных задач вне зависимости от треков, чтобы претендовать на статус медалиста.

Во время выполнения заданий можно пользоваться черновиком. Использование сторонних ресурсов и средств строго запрещено.

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 20,00

Инвариантная часть. Это задание необходимо выполнить всем участникам.

Найдите 2022 производную от функции

$$\frac{x^6 - 4x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 8}{x^4 - 5x^2 + 4} \cdot x^6 - 4x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 8x^4 - 5x^2 + 4$$

Вопрос **2**

Балл: 20,00

Инвариантная часть. Это задание необходимо выполнить всем участникам.

Между пунктами А и Б расстояние 50 км. В случайное время между 12.00 и 13.00 из пункта А в пункт Б по прямой отправляется поезд со скоростью 50 км/ч. Независимо от него, тоже в случайное время между 12.00 и 13.00 из пункта Б в пункт А по прямой отправляется поезд со скоростью 100 км/ч. Найдите математическое ожидание расстояния от их встречи до пункта

А.

Вопрос 3

Балл: 20,00

Инвариантная часть. Это задание необходимо выполнить всем участникам.

Вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} (1 - x \sin(\frac{1}{x})) dx \quad \int_0^{\infty} (1 - x \sin(1x)) dx$$

Вопрос 4

Балл: 20,00

Инвариантная часть. Это задание необходимо выполнить всем участникам.

На плоскости нарисованы 2022 непересекающиеся, но возможно касающиеся, окружности. Каково максимально возможное число точек касания?

Вопрос 5

Балл: 30,00

Задание по треку «Математика». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математика» и в рейтинге медалистов.

Найдите число неединичных 3×3 -матриц с коэффициентами в поле из 4 элементов, квадрат которых равен единичной матрице.

Вопрос 6

Балл: 30,00

Задание по треку «Математика». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математика» и в рейтинге медалистов.

Найдите все комплексно-аналитические функции на $\mathbb{C}$, которые переводят любую окружность с центром в нуле в окружность с центром в нуле.

Вопрос 7

Балл: 30,00

Задание по треку «Математическая физика». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математическая физика» и в рейтинге медалистов.

Цилиндрическая труба радиуса R неподвижно закреплена в горизонтальном положении (ось симметрии трубы – горизонтальна). Однородная тонкостенная труба радиуса $r < R$ и массы m движется без проскальзывания по внутренней поверхности закреплённой трубы так, что оси симметрии труб параллельны в любой момент времени. Система находится в вертикальном однородном поле тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$.

1. Выбрав обобщённые координаты, напишите Лагранжиан этой системы и её уравнения движения.
2. Определите частоту малых колебаний подвижной трубы вблизи положения устойчивого равновесия.

Вопрос 8

Балл: 30,00

Задание по треку «Математическая физика». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математическая физика» и в рейтинге медалистов.

Точечный заряд $q > 0$ массы m движется по круговой орбите радиуса R вокруг неподвижно закреплённого точечного заряда $-Q < 0$. Оцените в дипольном приближении электромагнитного излучения относительное уменьшение радиуса орбиты подвижного заряда $\Delta R/R$ за время одного оборота вокруг заряда Q , считая потери энергии за период обращения малыми по сравнению с полной энергией системы. Скорость движения заряда v пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света c .