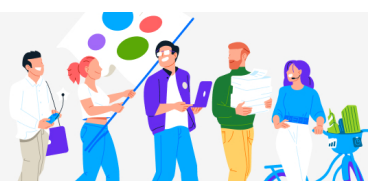


Work hard, play hard



Avito

Команда Авито желает всем участникам внимательности и удачи! У компании есть кое-что особенное для тех, кто займёт первые 10 мест в рейтинге по направлению: призы и ускоренный отбор на позицию аналитика данных.

Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Прикладная математика» состоит из двух частей:

Инвариантная часть представлена заданиями № 1–3. Их нужно выполнить всем участникам.

Вариативная часть разделена на треки:

- Трек «Математические методы анализа в экономике»: задания № 4–11.
- Трек «Математические методы в социологии»: задания № 12–15.
- Трек «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»: задания № 16–20.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться решить наибольшее число задач вне зависимости от треков, чтобы претендовать на статус медалиста.

Во время выполнения заданий вы можете:

- пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги), но на проверку он не предъявляется;
- использовать встроенный в систему калькулятор;
- использовать таблицу значений функций распределений. Справочный материал можно открыть на новой вкладке/в новом окне, это не будет считаться нарушением. Использование других справочных материалов и сторонних ресурсов строго запрещено.

Нажмите, чтобы открыть справочные материалы

Верим в ваш успех!

Вопрос 1

Балл: 16,00

Инвариантная часть. Это задание нужно выполнить всем участникам.

Прикладная математика

Let X_1, X_2, X_3 be independent exponentially distributed random variables with intensity λ . Ivan tests the hypothesis $H_0 : \lambda = \lambda_0$ against the alternative hypothesis $H_1 : \lambda = \lambda_1$. Decision rule is: reject null hypothesis if $\max(X_1, X_2, X_3) < 3/2$. The probability of Type I error is 0.125 and the probability of Type II error is 0.488.

Find the constants λ_0 and λ_1 .

Note: $\ln 0.5 = -0.693$, $\ln 0.2 = -1.609$.

Вопрос 2

Балл: 16,00

Инвариантная часть. Это задание нужно выполнить всем участникам.

Provide full solution with all relevant clarifications

A scholar compares performance of hockey teams from leagues A and B. The measure of performance is a total number of goals, a team scored last season. The scholar randomly selected 11 teams from league A and 9 teams from league B (see Table)

League	Goals
A	58,62,59,83,61,59,70,60,78,58,75
B	37,61,58,59,55,72,77,57,66

Is there a significant difference between the two leagues in terms of team performance? Take 95% confidence interval. An alternative hypothesis is non-directional.

Вопрос 3

Балл: 16,00

Инвариантная часть. Это задание нужно выполнить всем участникам.

Найти все значения параметра k , при которых вектор y имеет единственное разложение по векторам x_1, x_2, x_3 .

$$y = (1, 2, 3);$$

$$x_1 = (1 - k, 1, 1 - k);$$

$$x_2 = (5 - 4k, 1, 1 - k);$$

$$x_3 = (1, 1 - k, 1).$$

Вопрос 4

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов.

Evaluate the following limit:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + \sqrt{x^4 + 4x^3} - 2\sqrt{x^4 + 2x^3})$$

or prove that it does not exist.

Вопрос 5

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов.

Independent random variables X_1, \dots, X_n take non-negative integer values with probabilities

$$P(X_i = x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Here $p \in (0; 1)$ is an unknown parameter.

a) (3 points) Consider the following estimator of p :

$$\hat{p} = \begin{cases} 1 & \text{if } X_1 = 0; \\ 0 & \text{if } X_1 > 0. \end{cases}$$

Is it unbiased?

b) (3.5 points) Derive the maximum likelihood estimator of p .

Вопрос 6

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов.

Vasily asked 400 randomly chosen people whether they want ice cream to be sold in underground. He tests the hypothesis $H_0: p = 0.5$ with alternative $H_1: p > 0.5$, where p is the probability that a randomly chosen person wants ice cream to be sold in underground

Vasily conducted the test and got $p\text{-value} = 0.003$, but he lost all the other results

- 1) What conclusion should Vasily make on 1% significance level?
- 2) Calculate the share of respondents that supported selling ice cream in underground
- 3) Calculate 95% confidence interval for the probability that a randomly chosen person would want ice cream to be sold in underground

Вопрос 7

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в

рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов.

Let $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ be a numerical sequence of deterministic real positive numbers such that $\gamma_n \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$. Let ξ_1, \dots, ξ_n be a sequence of independent real random variables with the following density function:

$$p_{\xi_n}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_n}{x^2 + \gamma_n^2}, x \in \mathbb{R}, \gamma_n > 0.$$

Let η_1, \dots, η_n be a sequence of independent and uniformly distributed real random variables, $\eta_1, \dots, \eta_n \sim U([0, 2])$.

- [1.5 points] Show that ξ_n converges in distribution to 0.
- [2 points] Write down the (limiting) distribution function of a random variable that the expression $\sqrt{\xi_n + 1} - 0.5\eta_n$ converges in distribution to.
- [3 points] Let $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ be not a numerical sequence any more but an arbitrary number $\gamma > 0$. Let $\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$. Argue whether it is possible to use the law of large numbers for ψ_n or not. If it is possible, determine the value that ψ_n converges in probability to. If it is not possible, prove it.

Вопрос 8

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов

Solve the differential equation

$$\frac{dy}{d \arctg x} = \ln((x^2 + 1)^{2x}) e^{\ln^2((x^2+1)^4)} \quad dy \arctg x = \ln((x^2+1)^{2x}) e^{\ln^2((x^2+1)^4)}$$

subject to initial condition $y(0) = \frac{1}{8} y(0) = 18$.

Вопрос 9

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов.

Problem.

$$\text{Let } A = \begin{pmatrix} x_1(\cos(\alpha))^2 + x_2(\sin(\alpha))^2 & \frac{(x_1-x_2)}{2} \sin(2\alpha) \\ \frac{(x_1-x_2)}{2} \sin(2\alpha) & x_1(\sin(\alpha))^2 + x_2(\cos(\alpha))^2 \end{pmatrix},$$

where α is some fixed value parameter.

Given $G(x_1, x_2) = \text{tr}(A(x_1, x_2)) - 1 = 0$, where $\text{tr}(A)$ – matrix trace, find and analyze conditional extremum of $F(x_1, x_2) = \det(A(x_1, x_2))$

Вопрос 10

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов.

Find all real values of the parameter α such that the matrix

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha + 1 & 3 - 3\alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

is not diagonalizable over the field of complex numbers.

Вопрос 11

Балл: 6,50

Задание по треку «Математические методы анализа в экономике». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Математические методы анализа в экономике» и в рейтинге медалистов.

(a) For all real values of the parameter b such that $b^2 < 1$, evaluate the

improper integral $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + 2bx + 1} dx$.

(b) For all real values of the parameters b and c such that $b^2 < c$, evaluate the

improper integral $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + 2bx + c} dx$.

Вопрос **Инфо**

Следующие 4 задания относятся к треку «Математические методы в социологии». Эти задания учитываются в рейтинге по треку «Математические методы в социологии» и в рейтинге медалистов.

Выберите 2 вопроса из 4-х (задания № 12-15) и напишите по каждому вопросу мини-эссе

Вопрос 12

Балл: 26,00

Вопрос 1 из 4. Напишите мини-эссе только по двум вопросам на выбор

Planet X has productive and military types of societies. A global market for military services emerged. However, military societies did not turn into racketeers. Any productive society can make

multiple deals with various military societies as well as freely dissolve those contracts. The same is relevant to military societies.

The study of the reasons of contract dissolution was conducted for the certain period. See results in the Table below.

Make conclusions from the data.

Table

Maximum likelihood coefficients from a discrete proportional hazards regression model (between time t and $t+1$)

Dependent variable: dissolution of contracts between productive and military societies

variable, time (t)	coefficient	z-value
Number of contracts with military societies for a productive society (t)	0,011*	2,13
Concentration of contracts (t), i.e. distribution of contracts between military societies	-1,043	-1,93
Collaboration with one military society only (dummy) (t)	-0,418**	-3,35
Ratio of military to productive societies (t)	0,216	0,18
Military societies' network centralization (t)	-7,160*	-2,34
Productive societies' network centralization (t)	-0,431	-0,57
Logarithm of number of population in productive societies (t)	-0,121***	-3,87
Index of financial status of productive societies (t)	0,176**	-2,79
Change in financial status of productive societies (t)/(t+1)	0,199	-1,32
Military societies' rank/reputation (t)	-0,003***	-3,90
Number of productive societies having at least one contract with military societies (t)	-0,019*	-1,99
Centrality of military societies (t)	-0,184*	-0,17
Centrality of productive societies (t)	1,575*	2,47
Change in logarithm for trade balance (t)/(t+1)	-0,838*	-2,15
Period dummy (t)	0,684**	2,23
Period dummy, (t+1)	0,864**	3,18
"President" departs the office in a productive society (t)/(t+1)	-0,194**	-2,46
New "president" takes the office in a productive society (t)/(t+1)	0,028	0,38
Productive society has its own military potential (dummy) (t)	-1,080**	-3,27
Contract duration up to (t)	0,671***	6,52
Square of contract duration up to (t)	-0,061***	-7,85
<i>Control variable:</i> change in world GDP (t-1)/(t)	-21,431*	-2,54
Constant	-0,309	-0,38
Heterogeneity variance (gamma distribution)	0,107	0,63

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$; *** $p < 0.001$ (two-tailed tests)

Вопрос 13

Балл: 26,00

Вопрос 2 из 4. Напишите мини-эссе только по двум вопросам на выбор

Imagine, that you need to determine the size of Russian middle class according to **economic criteria (wealth, material welfare etc.)** using data from sample survey (questionnaire).

1. determine and justify relevant indicators of Russian middle class
2. articulate questions with lists of answers for measuring those indicators (if answer list is very long, just mention few of them)
3. articulate how you attribute a particular respondent to middle class. As you do not have the results of your sample survey, use hypothetical argumentation.

Вопрос 14

Балл: 26,00

Вопрос 3 из 4. Напишите мини-эссе только по двум вопросам на выбор

Imagine, that you need to determine the size of Russian middle class according to **socio-professional (occupational)** criteria using data from sample survey (questionnaire).

1. determine and justify relevant indicators of Russian middle class
2. articulate questions with lists of answers for measuring those indicators (if answer list is very long, just mention few of them)
3. articulate how you attribute a particular respondent to middle class. As you do not have the results of your sample survey, use hypothetical argumentation.

Вопрос 15

Балл: 26,00

Вопрос 4 из 4. Напишите мини-эссе только по двум вопросам на выбор

Somewhere on a lonely island inhabited by a society with traditional moneyless economy, conflicts between people emerged. Two British economists decided to uncover the reasons for that. They both supposed that the reasons for conflicts were market failures. They developed econometric models which needed a variable "attitude towards economic transactions". They decided to measure that variable through a set of judgements about trading transactions. As they clearly realized that they did not understand local culture, they used "expert" technique. It implied preliminary phase, when "experts" (potential respondents) attribute ranks to judgements, and only after that they select relevant judgements with individual weights and use them in a questionnaire. Also, their models require only quantitative (numeric) variables.

At first, they formulated 7 judgements and selected 10 "experts", whose task was to range each judgement from 1 to 11, where 1 is the most negative description of a transaction according to an "expert", 11 – the most positive description, and 6 – neutral.

Eventually, economist A got Table 1 (for brevity, it shows concepts instead of judgements). Economist B decided to make separate tables for “peasants” and “fishermen”. His was not happy with the first results, so he added judgements (concepts) 8–10 (see Tables 2 and 3).

1. How is it possible to get numeric variable out of experts’ ranking? Make relevant calculations.
2. What concepts will you select for questionnaire? Why?
3. Which economist got better results? Did concepts 8–10 included by economist B make any difference?
4. Suggest hypothesis for the reasons of conflicts.

Table 1.

Distribution of ranks suggested by 10 “experts” (cells contain numbers of experts’ decisions)

concepts	rank										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Bargaining	2	3				4	1				
Timely compensation	1	2	2							3	2
Delivery delay		2	2	1	2	2	1				
Request to sell on loan	4	1			1	3	1				
High quality goods					1	2	2	1	1	1	2
Hard to find a counteragent	1	2	1	2	1	1	1	1			
Possibility to buy on loan		1	2			3	3		1		

Table 2.

Distribution of ranks suggested by 10 “experts-peasants” (cells contain numbers of experts’ decisions)

экспертов)

concepts	rank										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Bargaining					1	8	1				
Timely compensation										1	9
Delivery delay		7	2	1							
Request to sell on loan	2	6	2								
High quality goods							1	3	3	2	1
Hard to find a counteragent		2	2	3	1	1	1				
Possibility to buy on loan							3	3	2	2	
Counteragent is a relative or a close friend		2		1	2	3	1	1			
Receive goods as a gift								1	5	3	1
Request to give goods as a gift	7	2	1								

Table 3.

Distribution of ranks suggested by 10 “experts-fishermen” (cells contain numbers of experts’ decisions)

concepts	rank										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Bargaining	8	2									
Timely compensation		2	4	3	1						

Прикладная математика

Delivery delay					1	8	1						
Request to sell on loan				1	2	6	1						
High quality goods					2	2	3	1	1	1			
Hard to find a counteragent	1	1	1	2	2	1	1	1					
Possibility to buy on loan		1	4			2	1	2					
Counteragent is a relative or a close friend													10
Receive goods as a gift									1	4	5		
Request to give goods as a gift						4	2	2	1	1			

Вопрос 16

Балл: 10,00

Задание по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках» и в рейтинге медалистов.

Ниже представлена программа на языке программирования Python. Укажите, что выведет данная программа и обоснуйте ответ. Считать диапазон целых чисел неограниченным (целые числа не переполняются), глубину стека также считать неограниченной.

```
def f(n, a):
    if n == 0:
        return 1
    elif n == 1:
        return 2022*a
    else:
        return 2*2022*f(n-1, a) - 2022*2022*f(n-2, a)

f(2022, 2) // f(2022, 1)
```

Вопрос 17

Балл: 10,00

Задание по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках» и в рейтинге медалистов.

Вычислить следующий определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} 1 + 2022^2 & 2022 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2022 & 1 + 2022^2 & 2022 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2022 & 1 + 2022^2 & 2022 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + 2022^2 & 2022 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2022 & 1 + 2022^2 \end{vmatrix}$$

Вопрос 18

Балл: 10,00

Задание по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках» и в рейтинге медалистов.

Исследовать интеграл

$$\int_0^{10} \frac{f'''(x)}{f'(x)} dx$$

на сходимость, при условии что подынтегральная функция непрерывна на $[\delta, 10]$ для любого $\delta > 0$, а функция $f(x)$ является решением задачи Коши:

$$2f'''(x) - f(x)f''(x) = 0, f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = a > 0. \quad 2f'''(x) - f(x)f''(x) = 0, f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = a > 0.$$

Вопрос 19

Балл: 12,00

Задание по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках» и в рейтинге медалистов.

Система обслуживания состоит из двух каналов обслуживания. В систему поступило задание, состоящее из 3 подзадач (A , B и C). В момент времени $t = 0$ канал 1 приступил к выполнению задачи A , и канал 2 приступил к выполнению задачи B . Задача C поступит на обслуживание (без задержки) на первый освободившийся канал. Предполагается, что времена выполнения каждой задачи случайны, не зависят друг от друга и имеют показательное распределение со средними m_A , m_B и m_C соответственно ($m_A = 10$ минут, $m_B = 10$ минут и $m_C = 12$ минут). Задание считается выполненным, если выполнены все подзадачи.

1. Чему равна вероятность того, что выполнение задачи C начнется менее чем через 5 минут?
2. Через сколько в среднем начнется выполнение задачи C ? (Ответ в минутах)
3. Чему равна вероятность того, что задача C будет выполнена не последней (то есть, задача C будет выполнена, а либо задача A , либо задача B все еще выполняется другим каналом)?
4. Через сколько в среднем завершится выполнение задания (то есть, будут выполнены все три подзадачи)? (Ответ в минутах)

Вопрос **20**

Балл: 10,00

Задание по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках». Это задание учитывается в рейтинге по треку «Прикладная математика в инженерии и естественных науках» и в рейтинге медалистов.

Дан массив из n целых чисел. Необходимо вычислить количество пар чисел в массиве, сумма которых равна нулю.

Написать оптимальный по числу операций в терминах "O" (O большое) алгоритм подсчета и оценить его сложность. Размер памяти и диапазон целых чисел считать неограниченными.