Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Состязание этого года посвящается памяти нашего учителя, коллеги и друга Андрея Бремзена (1975-2021).

Олимпиадное задание по направлению «Теория игр» состоит только из инвариантной части. Это означает, что вам нужно постараться решить все задачи и ответить на все вопросы, чтобы претендовать на призовые места.

При выполнении заданий можно использовать встроенный в систему калькулятор и черновик (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги. При необходимости можете делать черновые пометке в окне ответов внутри тестирующей системы), но на проверку он не предъявляется. Использование сторонних ресурсов и справочных материалов строго запрещено.

Верим в ваш успех!

Вопрос 1

Балл: 15,00

Please scroll down for the English version

Любовь с первого взгляда

Молодые люди Артем, Борис, Виктор и девушки Глафира, Дарья и Ева участвуют в телешоу "Любовь с первого взгляда". Сначала участники знакомятся друг с другом, а потом должны тайно проголосовать за одного из участников (молодые люди голосуют за девушек, девушки за молодых людей). Мы можем рассматривать участников как игроков, которые выбирают стратегию: за кого из представителей противоположного пола проголосовать. Если игрок X проголосовал за игрока Y, а игрок Y за игрока X, то X и Y образуют пару и отправляются на свидание за счет телешоу. Таких пар может быть несколько. Если игрок отправляется на свидание, то он получает некоторый положительный выигрыш, который зависит как от самого игрока, так и от человека, с которым будет свидание. Если игрок не идет на свидание, он получает выигрыш 0.

1) (5 баллов) Возможно ли равновесие Нэша в чистых стратегиях, при котором не будет образована ни одна пара?

2) (5 баллов) Возможно ли равновесие Нэша в чистых стратегиях, при котором будет образована ровно одна пара?

3) (5 баллов) Назовем набор стратегий оптимальным, если при нем суммарный выигрыш шести игроков максимален. Всегда ли оптимальный набор чистых стратегий является равновесием Нэша в этой игре?

Love at first sight

Boys Artem, Boris, Viktor and girls Glafira, Daria and Eva participate in the TV show “Love at First Sight”. First, the participants get to know each other, and then they must secretly vote for one of the participants (boys vote for girls, girls for boys). We can treat participants as players who choose a strategy: which member of the opposite sex to vote for. If player X voted for player Y and player Y voted for player X, then X and Y form a pair and go on a date at the expense of the TV show. There may be several such pairs. If the player goes on a date, then he receives some positive payoff, which depends both on the player himself and on the person with whom the date will be. If the player does not go on a date, he receives a payoff of 0.

1) (5 points) Is there exist a Nash equilibrium in pure strategies in which no pair is formed?

2) (5 points) Is there exist a Nash equilibrium in pure strategies in which exactly one pair is formed?

3) (5 points) Let's call a profile of strategies optimal if it maximizes the sum of payoffs of all six players. Is the optimal profile of pure strategies always the Nash equilibrium in this game?

Вопрос 2

Балл: 20,00

Please scroll down for the English version

Равновесие в неизвестной игре

В жизни игроки зачастую не знают точно, каковы платежи в матрице игры. В данной задаче мы предлагаем вам исследовать, как неопределенность относительно платежей в матрице повторяющейся игры влияет на возможность кооперации игроков.

Два игрока играют в бесконечно повторяющуюся игру, матрица которой может иметь один из двух видов, G^1G1 и G^2G2:

G^1

	X	Y	Z
A	$(4,4)$	$(1,1)$	$(2,5)$
B	$(7,1)$	$(3,3)$	$(1,1)$

G^2

	X	Y	Z
A	$(4,4)$	$(1,1)$	$(3,6)$
B	$(5,1)$	$(5/2,2)$	$(1,1)$

Фактор дисконтирования $\delta \in [0;1)$ у игроков одинаковый. Рассмотрим пару grim-trigger стратегий, сводящуюся к такому поведению игроков: играть (A, X) в первом периоде и в любом последующем, если в прошлом всегда игралось (A, X). В противном случае, если отклонился игрок 1, играть худшее для игрока 1 равновесие по Нэшу в чистых стратегиях сегодня и в каждом последующем периоде; если отклонился игрок 2, играть худшее для игрока 2 равновесие по Нэшу в чистых стратегиях сегодня и в каждом последующем периоде.

1. (2 балла) Допустим, игроки точно знают, что в каждом периоде матрица игры имеет вид G^1G1. Определите, при каких значениях δ описанная пара стратегий будет равновесием по Нэшу, совершенным в подыграх.

2. (2 балла) Допустим, игроки точно знают, что в каждом периоде матрица игры имеет вид G^2G2. Определите, при каких значениях δ описанная пара стратегий будет равновесием по Нэшу, совершенным в подыграх.
3. (16 баллов) Допустим, игроки не уверены в том, какой вид из двух имеет матрица игры. В каждом периоде игроки узнают (до принятия решений), какой вид имеет матрица игры в этом периоде, но не знают, какой вид из двух будет иметь матрица в будущем. При каких значениях δ описанная пара стратегий будет равновесием по Нэшу, совершенным в подыграх, для любой последовательности матриц игры $\{G_t\}_{t=1}$ {Gt}t=1, где $Gt \in \{G^1, G^2\}$ Gt∈{G1,G2}?

Equilibrium in the unknown game

In real life, players often don't know exactly what the payoffs are in the matrix of the game. In this problem, we suggest you explore how the uncertainty about payoffs in the repetitive game matrix affects the ability of players to cooperate.

Two players play an infinitely repeated game whose matrix can be of one of two G^1G1 or G^2G2:

G^1

	X	Y	Z
A	$(4,4)$	$(1,1)$	$(2,5)$
B	$(7,1)$	$(3,3)$	$(1,1)$

G^2

	X	Y	Z
A	$(4,4)$	$(1,1)$	$(3,6)$
B	$(5,1)$	$(5/2,2)$	$(1,1)$

The discount δ ∈ [0; 1) is the same for both players. Consider a pair of grim-trigger strategies that prescribe the following behavior to the players: play (A, X) in the first period and in any subsequent period, if (A, X) has always been played in the past. Otherwise, if player 1 deviated, play the worst Nash equilibrium for player 1 in pure strategies today and in each subsequent period; if player 2 deviated, play the worst Nash equilibrium for player 2 in pure strategies today and in each subsequent period.

1. (2 points) Assume that players know for sure that in each period the matrix has the form G^1G1. Determine for what values of δ the described pair of strategies will be a subgame perfect Nash equilibrium.
2. (2 points) Assume that players know for sure that in each period the matrix has the form G^2G2. Determine for what values of δ the described pair of strategies will be a subgame perfect Nash equilibrium.
3. (16 points) Assume that players are unsure which of the two is the matrix. In each period, the players know (before making decisions) what form the matrix has in this period, but they do not know which form of the two the matrix will have in the future. For what values of δ will the described pair of strategies be a subgame-perfect Nash equilibrium for any sequence of matrices $\{G_t\}_{t=1}$ {Gt}t=1, where $G_t \in \{G^1, G^2\}$ Gt∈{G1,G2}?

Вопрос 3

Балл: 20,00

Please scroll down for the English version

Мелочь, а приятно

У Ани скопилось много рублевых монеток и они решили сыграть с Борей в такую игру. Сначала Боря рисует на большом листе бумаги k точек, а затем Аня пытается их накрыть монетками. Монетки могут касаться, но класть их друг на друга запрещено. Аня выигрывает, если ей удалось накрыть все точки.

1) (1 балл). Покажите что Аня выигрывает при k=2.

2) (X≤ ≤19 баллов) Покажите, что Аня выигрывает при k=K точках. Чем больше K, тем больше

баллов вы получите.

A trifle, but nice

Anya has collected a lot of ruble coins and they decided to play the following game with Boria. First, Boria draws k dots on a large sheet of paper, and then Anya tries to cover them with coins. Coins can touch, but putting them on each other, even partially, is prohibited. Anya wins if she manages to cover all the dots.

1. (1 point). Show that Anya wins for k=2.
2. (X≤ ≤19 points) Show that Anya wins for k=K points. The more K is, the more points you get.

Вопрос **4**

Балл: 15,00

Please scroll down for the English version

Сюрприз для сайта знакомств.

Молодой программист создал сайт межкампусных знакомств для своего университета. В тестировании согласились поучаствовать Антон и Богдан из Москвы, Владимир и Георгий из Санкт-Петербурга, а также девушки Елена, Жанна, Зоя и Ирина из Перми. Ребята на онлайн-встрече познакомились друг с другом и честно указали список своих предпочтений. Программисту нужно найти стабильное разбиение на пары. Назовем разбиение на пары стабильным, если в нем не находится студента и студентки, которые не в паре друг с другом, но предпочитают друг друга своим партнерам. Программист был уверен, что задача разрешима: ведь он знаком с алгоритмом Гейла-Шепли (Нобелевская премия по экономике 2012)! Но возникла неожиданная сложность. К нему обратились сестры Елена и Жанна и заявили, что им важно быть рядом друг с другом, поэтому вместе поедут или в Москву, или в Санкт-Петербург. Сестрам настолько важно быть рядом, что любая из них готова отказаться от самого предпочтительного для себя партнера, если он будет жить не в том городе, в котором живет партнер сестры. При этом у девушек нет опции отказаться от поездки совсем, т.е. они в целом способны отправиться в разные города, если возможности поехать в один город, даже к неудачному партнеру, не предоставится. Это условие стало сюрпризом для программиста, и теперь ему требуется помощь участников олимпиады по теории игр. Возможно ли при любых наборах предпочтений найти стабильное разбиение на пары?

Surprise for a dating site

A young programmer created a multi-campus dating site for his university. Anton and Bogdan from Moscow, Vladimir and Georgy from St. Petersburg, as well as the girls Elena, Zhanna, Zoya and Irina from Perm agreed to participate in the testing. The guys got to know each other at the online meeting and honestly indicated a list of their preferences. The programmer needs to find a stable matching in pairs. Let's call a matching stable if it does not contain a boy and a girl who are not in a pair with each other, but prefer each other to their partners. The programmer was sure that the problem was solvable: after all, he was familiar with the Gale-Shapley algorithm (Nobel Prize in Economics 2012)! But an unexpected difficulty arose. The sisters Elena and Zhanna came to him and said that it is important for them to be in one city, so they would go together either to Moscow or St. Petersburg. It is so important for the sisters to be together that any of them is ready to give up their most preferred partner if he does not live in the city where the sister's partner lives. It is to be noted that the girls do not have the option to refuse the trip, i.e. they are generally able to go to different cities if there is no opportunity to go to one city, even to an undesirable partner. This condition became a surprise to the programmer, and now he needs the help of the participants of the Olympiad in Game Theory. Is it possible to find a stable matching for any set of preferences?

Вопрос 5

Балл: 10,00

Please scroll down for the English version

Такие пироги

Двое делят пирог. Сначала первый режет его на две части. Потом второй режет один из получившихся двух кусков. Затем они по очереди берут куски: сначала первый игрок, потом второй, затем опять первый.

Какую долю пирога может гарантировать себе второй игрок независимо от действий первого? Считайте, что пирог — это интервал [0,1], а ценность куска A⊆⊆[0,1] для игрока i равна $V_i(A) = \int_A v_i(x)\,dx$ Vi(A)=∫Avi(x)dx. Здесь $v_i(x)$ vi(x) — неотрицательная функция с полным интегралом 1.

So that's how it is

Two players share a pie. First, player 1 cuts it into two parts. Then player 2 cuts one of the resulting two pieces into two parts. Then they take the pieces one by one: first player 1, then player 2, then player 1 again.

Which share of the pie can the player 2 guarantee himself regardless of the actions of the first? Treat a pie as an interval [0,1], and the valuation of the piece A⊆⊆[0,1] for player i equals $V_i(A) = \int_A v_i(x)\,dx$ Vi(A)=∫Avi(x)dx. Here $v_i(x)$ vi(x) is a non-negative function with the full integral equals 1.

Вопрос 6

Балл: 20,00

Please scroll down for the English version

Какую олимпиаду выбрать?

Два древнегреческих царя, Агамемнон и Менелай, снова не ладят. Каждый из них решил устроить свои олимпийские игры и зазывает атлетов. Известно, что прыгуны в длину с места способны прыгнуть на длину x метров, которая есть реализация случайной величины, равномерно распределенной на отрезке от трех до пяти метров. Каждый спортсмен точно знает, насколько он прыгнет. Менелай построил для них песчаный сектор длиной 7 метров и разметил шкалу в нем. Агамемнон же был скуповат, да и строители его подворовывали, поэтому он построил сектор лишь на 4.5 метра. Победителем в каждой олимпиаде объявят атлета, который прыгнул дальше других, призовой фонд у царей одинаков и нормирован к 1. Однако если несколько участников олимпиады Агамемнона перепрыгнут сектор целиком, то не будет возможности понять, кто прыгнул дальше (шкалы там уже нет), тогда их всех объявят победителями и разделят призовой фонд между ними поровну. В Греции имеются n атлетов. Предположим, что n достаточно велико, так что единоличное изменение стратегии одним игроком не влияет на доли игроков, участвующих в тех или других играх, от общего числа. Игры проходят одновременно, так что нужно выбрать для участия лишь одни.

1. (6 баллов) Назовем атлета сильным, если длина его прыжка хотя бы 4.5 метра. У кого из двух царей состязание соберет больше сильных атлетов?
2. (6 баллов) Назовем атлета слабым, если длина его прыжка меньше 4.5 метров. У кого из двух царей состязание соберет больше слабых атлетов?
3. (8 баллов) Опишите равновесные стратегии атлетов в зависимости от их длины прыжка.

Which Olympiad to choose?

Two ancient Greek kings, Agamemnon and Menelaus, do not get along again. Each of them decide to arrange their own Olympic Games and invite athletes. It is known that long jumpers are able to jump to a length of x meters, which is the realization of a random variable uniformly distributed over [3, 5] meters. Each athlete knows exactly how long his jump is. Menelaus built for them a sector of 7 meters long and marked the scale in it. Agamemnon was stingy, and the builders robbed him, so he built a sector of only 4.5 meters. The winner in each Olympiad will be the athlete who jumped further than the others, the prize fund of both kings is the same and normalized to 1. However, if several participants in the Agamemnon Olympiad jump over the entire sector, then it will not be possible to understand who jumped further (the scale is no longer there), then everyone will be declared the winners and the prize fund will be divided equally among them. There are n athletes in Greece. Assume that n is large enough so that a unilateral change in strategy by one player does not affect the shares of players participating in one or another game. The games take place at the same time, so one needs to choose only one to participate in.

1. (6 points) Let's call an athlete strong if the length of his jump is at least 4.5 meters. Which Olympiad of the two kings will attract more strong athletes?
2. (6 points) Let's call an athlete weak if the length of his jump is less than 4.5 meters. Which Olympiad of the two kings will attract more weak athletes?
3. (8 points) Describe the equilibrium strategies of the athletes depending on their jump length.