Направление «Финансы и инвестиции»

Инвариантная часть

Решение задания № 1

(a) В задаче рассматривается модель уклонения от налогов (см., например, Левина Е.А., Покатович Е.В. Микроэкономика рыночного равновесия. М.: ИД ВШЭ, 2020, § 2.3, упр. 12.). По условию задачи г-жа А располагает налогооблагаемым богатством w = 3000 д.е. Обозначим долю дохода, которую г-жа А должна заплатить в качестве налога, τ = 0,16; долю незадекларированного дохода, которую г-жа А должна будет заплатить в качестве штрафа, в случае обнаружения уклонения, обозначим f = s/100, а вероятность аудита (который выявляет нарушение, если оно имело место) обозначим π = 0,36.

Обозначим x величину незадекларированного дохода. Это означает, что налогоплательщик в налоговой декларации указывает величину w - x и должен заплатить в качестве налога денежную сумму, равную τ(w - x). Таким образом, если аудит не проводится (это состояние мира наступает с вероятностью 1 - π), то богатство г-жи А в этом состоянии мира равно:

$$x_{NL} = w - \tau(w - x) = w(1 - \tau) + \tau x.$$

Если же аудит проводится (это состояние мира наступает с вероятностью π), то богатство г-жи А составляет:

$$x_L = w - \tau(w - x) - fx - \tau x = w(1 - \tau) - fx.$$ (2 **балла**)

Задача максимизации ожидаемой полезности налогоплательщика в общем виде имеет вид:

$$U(x) = \pi u(w(1-\tau) - fx) + (1-\pi)u(w(1-\tau) + \tau x) \to \max_{0 \le x \le w}.$$

Для заданной в условии элементарной функции полезности задача записывается следующим образом:

$$U(x) = -\frac{\pi}{w(1-\tau) - fx} - \frac{(1-\pi)}{w(1-\tau) + \tau x} \to \max_{0 \le x \le w}$$ (1 **балл**)

Внутреннее решение задачи (положительная оптимальная величина незадекларированного дохода) 0 < x < w удовлетворяет условию первого порядка:

$$U'(x) = -\frac{\pi f}{(w(1-\tau) - fx)^2} + \frac{(1-\pi)\tau}{(w(1-\tau) + \tau x)^2} = 0$$ (2 **балла**)

По условию г-жа А декларирует сумму 250 д.е., таким образом, w - x = 250, а x = w - 250 = 750.

Подставив известные значения параметров модели и заданное в условии решение задачи максимизации ожидаемой полезности, получим:

$$U'(750) = -\frac{0{,}36 f}{(840 - 750 f)^2} + \frac{0{,}64 \cdot 0{,}16}{(840 + 0{,}16 \cdot 750)^2} = 0$$ (3 **балла**)

Преобразовав, получим: $\frac{0{,}6\sqrt{f}}{840-750f} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}4}{840+0{,}16\cdot 750}$ $\frac{0{,}6\sqrt{f}}{840-750f} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}4}{840+0{,}16\cdot 750}$ $\frac{0{,}6\sqrt{f}}{840-750f} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}4}{840+0{,}16\cdot 750}$,

откуда $\frac{0{,}6\sqrt{f}}{840-750f} = \frac{1}{3000}$ $\frac{0{,}6\sqrt{f}}{840-750f} = \frac{1}{3000}$ $\frac{0{,}6\sqrt{f}}{840-750f} = \frac{1}{3000}$. Из последнего выражения следует:

$75f+180\sqrt{f}-84=075f+180\sqrt{f}-84=075f+180\sqrt{f}-84=0$, а значит

$\sqrt{f}=\frac{-90+\sqrt{8100+84\cdot 75}}{75}=0,4\sqrt{f}=\frac{-90+\sqrt{8100+84\cdot 75}}{75}=0,4\sqrt{f}=\frac{-90+\sqrt{8100+84\cdot 75}}{75}=0,4$. Таким образом, $f = 0{,}16$, а значит в процентах ставка штрафа за каждую незадекларированную единицу дохода составляет s = 16%. (2 **балла**)

(б) Если решением задачи является x = 0, то $U'(0) \le 0$. Таким образом, выполняется следующее соотношение: $U'(0)=-\frac{\pi f}{(w(1-\tau))^2}\le 0U'(0)=-\frac{\pi f}{(w(1-\tau))^2}\le 0U'(0)=-\frac{\pi f}{(w(1-\tau))^2}\le 0$ (3 **балла**), откуда следует $0{,}64\cdot 0{,}16 \le 0{,}36\, f$. Отсюда найдем, что г-жа А не будет уклоняться от уплаты налогов при $f\ge\frac{64}{225}\approx 0,284 f\ge\frac{64}{225}\approx 0,284$, т.е. при $s\ge\frac{64}{225}\cdot 100\approx 28,4$ $s\ge\frac{64}{225}\cdot 100\approx 28,4$. Соответственно, минимальное значение ставки штрафа s ≈ 28,4%. (2 **балла**)

Теперь проиллюстрируем решение в пространстве контингентных благ. (2 **балла**) Состояния мира в этой задаче – это аудит не проводится и аудит проводится. В п. (а) уже были выписаны контингентные блага.

Если аудит не проводится, то богатство г-жи А в этом состоянии мира равно:

$$x_{NL} = w - \tau(w - x) = w(1 - \tau) + \tau x.$$

Если же аудит проводится, то богатство г-жи А составляет:

$$x_L = w - \tau(w - x) - fx - \tau x = w(1 - \tau) - fx.$$

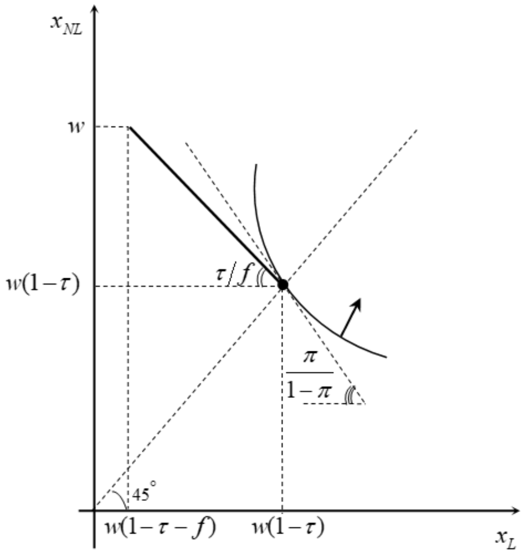
Можем записать уравнение бюджетной линии. Для этого из x_L выразим x, который подставим в x_{NL}. Таким образом, $x=\frac{w(1-\tau)-x_L}{f}x=\frac{w(1-\tau)-x_L}{f}$, откуда получим $x_{NL}=-\frac{\tau}{f}x_L+\frac{w(1-\tau)(\tau+f)}{f}$ $x_{NL}=-\frac{\tau}{f}x_L+\frac{w(1-\tau)(\tau+f)}{f}$ при ограничении $w(1-\tau-f)\le x_L\le w(1-\tau)$ (или ограничением может быть на x_{NL}: $w(1-\tau)\le x_{NL}\le w$. Заметим, что тангенс угла наклона бюджетной линии равен $(-\frac{\tau}{f})(-\frac{\tau}{f})$.

Для того, чтобы изобразить бюджетную линию, не обязательно выводить уравнение бюджетной линии, а можно отметить две граничные точки и соединить. При x = 0 координата точки в пространстве контингентных благ ($x_L = w(1 - \tau)$, $x_{NL} = w(1 - \tau)$). При x = w координата точки в пространстве контингентных благ ($x_L = w(1 - \tau - f)$, $x_{NL} = w$). Зная координаты этих точек, можно найти тангенс угла наклона бюджетной линии.

Для элементарной функции полезности г-жа А выполнено $u'(x)=\frac{1}{x^2}>0u'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ и $u''(x)=-\frac{2}{x^3}<0u''(x)=-\frac{2}{x^3}<0$. Положительная первая производная означает рост полезности с ростом денежной суммы, которой располагает г-жа А, а отрицательная вторая производная означает, что рост замедляется с увеличением располагаемой денежной суммы. Таким образом, элементарная функция полезности строго вогнута или, другими словами, г-жа А является рискофобом (строго несклонна к риску). В этом случае кривые безразличия в пространстве контингентных благ имеют вид, как показано на рисунке. Для того, чтобы г-жа А не уклонялась от налогов, наклон касательной к кривой безразличия в точке на линии определенности по абсолютной величине должен быть больше, чем наклон бюджетной линии по абсолютной величине. Тангенс угла наклона касательной к кривой безразличия в точке на линии определенности равен отношению вероятности наступления благоприятного состояния мира (уклонение от налогов не будет выявлено) к вероятности наступления неблагоприятного состояния мира (будет проведён аудит, который выявит уклонение).

В обозначениях задачи, используемых выше, это означает, что должно быть выполнено неравенство $\frac{\tau}{f}\le\frac{\pi}{1-\pi}\frac{\tau}{f}\le\frac{\pi}{1-\pi}$ (3 **балла**). Подставляя заданные в условиях значения параметров, получим $\frac{0,16}{f}\ge\frac{0,36}{0,64}\frac{0,16}{f}\ge\frac{0,36}{0,64}$, откуда получим соотношение $0{,}64\cdot 0{,}16 \le 0{,}36\, f$, к которому пришли, решая задачу аналитически. Таким образом, минимальное значение ставки штрафа составляет s ≈ 28,4%. (2 **балла**)

Решение может быть основано полностью на рисунке. (2 **балла за верный рисунок**)



(в) Элементарная функция полезности г-жа А в случае, если она нейтральна к риску, может быть записана следующим образом: u(x) = x. (2 **балла**)

1 способ

Напомним, что задача максимизации функции ожидаемой полезности имеет вид (см. пункт (а)): .

Для нейтрального к риску индивида эта задача принимает вид:

$$U(x) = \pi(w(1-\tau) - fx) + (1-\pi)(w(1-\tau) + \tau x) \to \max_{0 \le x \le w}$$ (2 **балла**)

Преобразовав, получим, $U(x) = w(1-\tau) + x((1-\pi)\tau - \pi f) \to \max_{0 \le x \le w}$.

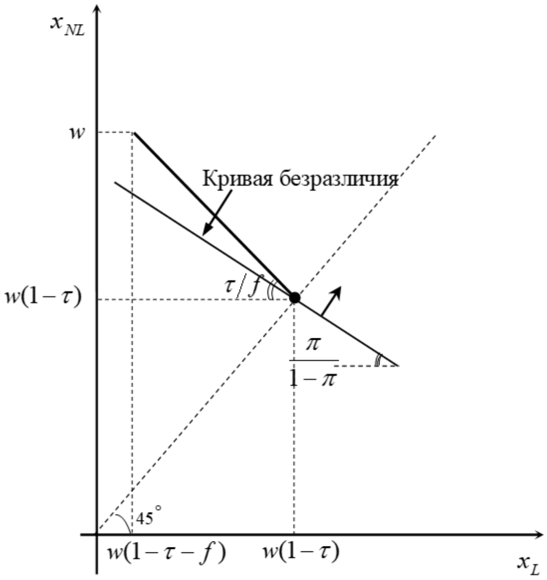
При ставке штрафа из п. (а) получим, что (1 - π)τ - πf > 0. В этом случае значение x должно быть как можно больше, а значит x = w. Таким образом, при ставке штрафа из п. (а) г-жа А скроет полностью доход (задекларирует доход, равный нулю). (2 **балла**)

При ставке штрафа из п. (б) получим, что (1 - π)τ - πf = 0. В этом же случае значение x может принимать любое значение из интервала – значение функции полезности от x на зависит. Таким образом, поскольку при ставке штрафа из п. (б) г-же А безразлично какую сумму декларировать, то x ∈ [0, w] (2 **балла**)

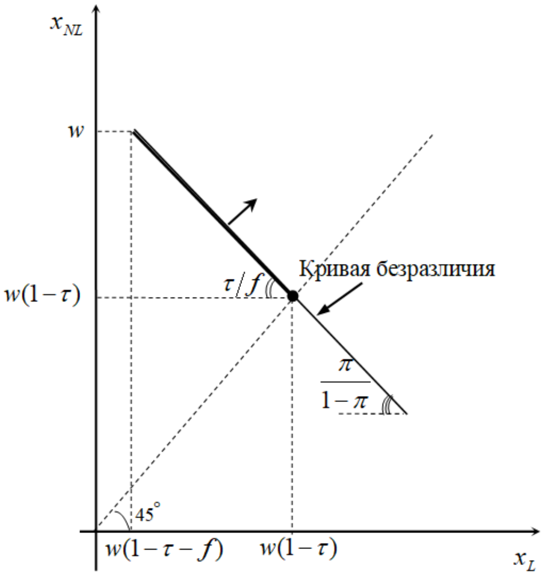
2 способ

Задачу можно решить графически. В пространстве контингентных благ кривые безразличия для нейтрального к риску индивида – это прямые с тангенсом угла наклона по абсолютной величине равным $\frac{\pi}{1-\pi}$ $\frac{\pi}{1-\pi}$.

Если бюджетная линия круче касательной к кривой безразличия, проведенной в точке на линии определенности, т.е. $\frac{\tau}{f} > \frac{\pi}{1-\pi}$ $\frac{\tau}{f} > \frac{\pi}{1-\pi}$ (что как раз и означает, что (1 - π)τ - πf > 0), то г-жа А скроет весь доход.



Если касательная к кривой безразличия, проведенная в точке на линии определенности и бюджетная линия имеют одинаковый наклон, т.е. $\frac{\tau}{f} > \frac{\pi}{1-\pi}$ $\frac{\tau}{f} > \frac{\pi}{1-\pi}$ (что означает, что $(1 - \pi)\tau - \pi f = 0$), то существует множество решений – г–же А безразлично, на какую сумму скрывать или же она может не уклоняться от уплаты налогов совсем.



Решение задания № 2

(a) Если экономика находится в состоянии полной занятости, это означает, что фактический уровень инфляции равен ожидаемому и фактический уровень безработицы равен естественному. Используя условие $\pi_0 = \pi_0^e = 0.2$ и подставляя его в уравнение кривой Филлипса, получаем, что $u_0 = u^* = 0.1$

Равновесие на рынке труда определяется условием $L^d = L^s$. Спрос на труд определяется из задачи максимизации прибыли фирмой: $Y_L' = \frac{W}{P}$. В нашем случае это условие выглядит как $\frac{W}{P} = \frac{2,5}{\sqrt{L}}$. Отсюда $L^d = \frac{2,5^2}{(\frac{W}{P})^2}$. Приравнивая спрос на труд и предложение труда, находим равновесную реальную заработную плату $\frac{W}{P} = 1.25$. Равновесный уровень занятости равен 4 (L^* = 3,2 × 1.25 = 4). Равновесный уровень выпуска составляет 10 (Y* = 5√4 = 10). Отметим, что в периоде 0, равновесный уровень выпуска равен потенциальному (естественному) уровню выпуска.

1 балл за u^*
1 балл за w^*
1 балл за L^*
1 балл за Y^*

(б) Закон Оукена имеет вид: $\frac{Y-Y^*}{Y^*} = -2.5(u-u^*)$

Кривая Филлипса имеет вид: $\pi = \pi^e - 0.5(u-u^*)$

Объединяя закон Оукена и кривую Филлипса получаем уравнение кривой совокупного предложения в краткосрочном периоде (SRAS: взаимосвязь уровня выпуска и цен/уровня инфляции): $Y = Y^* + \frac{2.5}{0.5}Y^*(\pi - \pi^e) = 10 + 50(\pi - \pi^e)$

Пусть $\pi_1 = 0.1$, $\pi_1^e = 0.2$ (по условию задачи ожидания наивные, то есть $\pi_t^e = \pi_{t-1}$). Тогда из SRAS получаем, что $Y_1 = 10 + 50 \times (-0.1) = 5$.

Подставляя в уравнение кривой Филлипса для периода 1 соответствующие уровни инфляции и инфляционных ожиданий получаем, что $u_1 = 0.3$.

3 **балла за вывод кривой** SRAS
2 **балла за расчет** Y_1
1 **балл за расчет** u_1

(в) Коэффициент потерь рассчитывается как: $SR = \left|\frac{\Sigma\%\frac{Y-Y^*}{Y^*}}{\Sigma\%\pi}\right| = \left|\frac{\Sigma\frac{k}{\alpha}(\pi_t - \pi_{t-1})\%}{\Sigma\%\pi}\right|$

Случай сокращения инфляции до целевого уровня за 1 период

	T=0	T=1	T=2
π	0.2	0.1	0.1
π^e	0.2	0.2	0.1
$\pi - \pi^e$	0	-0.1	0
$u - u^*$	0	0.2	0
u	0.1	0.3	0.1

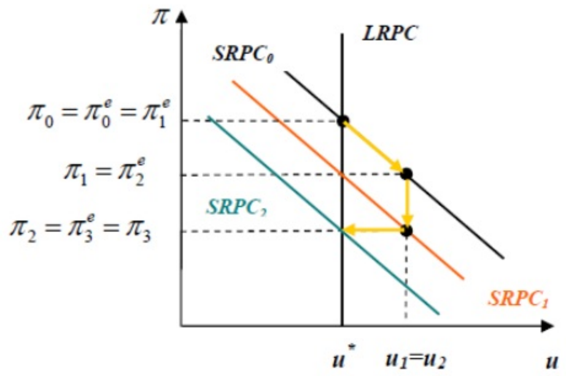
Коэффициент потерь определяется как: $SR = \left|\frac{k}{\alpha}\right| = 5$

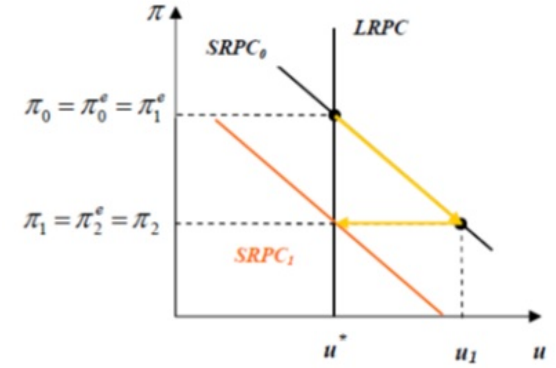
Аналогично для случая снижения инфляции за два периода: $SR = \left|\frac{k}{\alpha}\right| = 5$.

(Можно было сразу аналитически показать, что для наивных ожиданий коэффициенты потерь будут равны).

5 **баллов за расчет коэффициента потерь для случая однопериодного сокращения**
5 **баллов за расчет коэффициента потерь для случая двухпериодного сокращения**

(г) Необходимо было изобразить ДВА графика для ДВУХ политик дезинфляции. **Каждый график оценивался в 2,5 балла**.





Трек «Финансовые рынки»

Пример решения задания № 3

Темп роста дивидендов: 7.5%
Темп роста прибыли: 7.5%
Ожидаемая доходность акции: 12.5%

1) g (темп роста дивидендов) = ROE*Plawback ratio = 0,25*0,3 = 0,075 = 7,5%
2) Если ожидается стабильный рост (ROE стабилен, Plawback ratio стабильно), то темп роста дивидендов равен темпу роста прибыли и равен 7,5%.
3)Dividend yield = Div_1/P_0
Формула цены акции при росте компании:
$P_0 = Div_1/(r-g)$, где r - доходность акции.
r = Div_1/P_0+ g = Dividend yield + g = 0,05 + 0,075 = 0,125 = 12,5%. Доходность акции положительна.

Пример решения задания № 4

Ответ на вопрос 1: ожидаемая доходность равно-взвешенного портфеля из A и B r(P) = w_A*r_A +w_B*R_B = 0.5*0.03+0.5*0.04 = 0.035

Ответ на вопрос 2: стандартное отклонение равно-взвешенного портфеля из A и B

$$\sigma(P) = (w_A^2 * \sigma_A^2 + w_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * w_a * w_B * cov(r_A, r_B))^{(1/2)} = 0.37$$
$$\sigma(P) = (w_A^2 * \sigma_A^2 + w_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * w_a * w_B * cov(r_A, r_B))^{(1/2)} = 0.37$$
$\sigma(P) = (w_A^2 * \sigma_A^2 + w_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * w_a * w_B * cov(r_A, r_B))^{(1/2)} = 0.37$

Ответ на вопрос 3: веса A и B, при которых дисперсия портфеля, составленного из A и B, будет минимальной

$$w^2 * 0.16 + (1-w)^2 * 0.25 + 2 * w(1-w) * 0.08 \to \min_w$$
$$w^2 * 0.16 + (1-w)^2 * 0.25 + 2 * w(1-w) * 0.08 \to \min_w$$
$w^2 * 0.16 + (1-w)^2 * 0.25 + 2 * w(1-w) * 0.08 \to \min_w$

$w_A = 0.68$
$w_B = 0.32$

Пример решения задания № 5

Ответ на вопрос 1: Справедливая цена фьючерса при непрерывных процентах
F = 600 * exp(1 * 0.1) = 663.10255085 < 800

Ответ на вопрос 2: справедливая цена фьючерса при предположении простых процентов
F = 600 * (1 + 0.1) = 600 * 1.1 = 660 < 800

Ответ на вопрос 3: стратегия арбитражера
Открыть короткую стратегию по фьючерсу на 1 унцию. Взять сейчас кредит на 600 долларов. Купить 1 унцию золота.
Через 1 год закрыть позицию по фьючерсу: так как фьючерс - расчетный инструмент, то не надо никому ничего доставлять, просто закрываем контракт, получаем 800 - цена золота через год. Продаем унцию золота, получаем цену золота через год. Погашаем кредит, за который придется уплатить <=663.10255085.

Ответ на вопрос 4: доходность и выгоды предлагаемой стратегии
Тогда суммарный поток: 800 - цена через год + цена через год - (<= 663.10255085) >= 800 - 663.1 = 136.89744915. То есть, на одной унции можно заработать не менее 136 долларов через год. Данную стратегию можно аналогично записать для k унций и получить k * 136.89744915 долларов.
В расчете на одну унцию доходность = 136.89744915 / 600 = 22.81624153%. Доходность на начальный капитал не посчитать, так как он равен нулю.
Выгоды такой стратегии в том, что она не требует никакого начального капитала.

Трек «Корпоративные финансы»

Пример решения задания № 6

Generally, Assets (of a firm, A) + Tax Shield of Debt (T) = Equity (E) + Debt (D) = V for levered firm. For unlevered one can write that A = E = V. T = t * D, where t is a tax rate, which is also a reasonable assumption. For levered firm A = E + D - t * D= E + (1 - t) * D.
Then for returns one can write $r_A*A/V+r_T*T/V=r_E*E/V+r_D*D/V$ for levered firm. And $r_A=r_E$ for unlevered firm. We can multiply first equation by V and nothing will change: $r_A*A+r_T*T=r_E*E+r_D*D$.

As return is linear in beta, then the same holds for betas: $\beta_A*A+\beta_T*T=\beta_E*E+\beta_D*D$ for levered firm and $\beta_A=\beta_E$ for unlevered. So, beta of an unlevered firm is just a beta of equity. Also, for levered company I change β_A for β_L, which stands for beta of levered company.

If we assume that Debt is riskless, so its beta is zero and risk of tax shield is the same as of Debt, so, zero. So, $\beta_L*A=\beta_E*E$. Also, that return on equity and its beta does not depend on debt of company. Then as $\beta_E=\beta_U$, $\beta_L*(E+(1-t)*D)=\beta_U*E$. As a result, $\beta_L=\beta_U*E/(E+(1-t)*D)$. $\beta_L=\beta_U/(1+(1-t)*D/E)$.

Пример решения задания № 7

2.1. Stable growth => g = RR*ROE = 0.2*0.25=0.05. So, the growth is 5% for Net Income and Dividends.

	Last 2021	Coming 2022	Coming 2023	Coming 2024
Equity book value	20000	21000 4200/0.2=21000	22050 4410/0.2=22050	23152.5 4630.5/0.2=23152.5
Net Income	4000	4200 4000*1.05=4200	4410 4200*1.05=4410	4630.5 4410*1.05=4630.5
Depreciation expense		160 21000-20000-840=160	168 22050-21000-882=168	176.4 23152.5-22050-926.1=176.4

	Last 2021	Coming 2022	Coming 2023	Coming 2024
CAPEX	800 4000*0.25=800	840 4200*0.25=840	882 4410*0.25=882	926.1 4630.5*0.25=926.1
DPS (dividend per share)	6 3000/500=6	6.3 6*1.05=6.3	6.615 6.3*1.05=6.615	6.94575 6.615*1.05

Fair value of one share is 90. Let's prove it:

- DPS in 2020: (0.75*4000)/500=0.75*8=6
- Using Gordon model for 1 January 2022: $D_1/(r-g)$ => $D_1 = D_0*(1+g)$ => $D_1 = 6*1.05$ => $P_0=6.3/(0.12-0.05)=90$. It's true.

2.2. Additional shares will be used according tp the aim of double dividend. So, the number of shares before such event - 500. The fair value - 90. So, we can issue 3150/90=35 shares for dividend payments for fair price 90. It's not standard money dividend, it's dividend by shares.

The dividend per share will decline accounting to the increasing number of shares. So, the table will change:

	Last 2021	Coming 2022	Coming 2023	Coming 2024
Dividend per share		5.89 4200*0.75/535=5.89	6.18 4410*0.75/535=6.18	6.49 4630.5*0.75/535=6.49

The fair value of stock will be: $D_1/(r-g)=5.89/(0.12-0.05)=84.11$ it will be declined according to new issurance.

Пример решения задания № 8

Question 3.1.
Net Income $(NI)_{1,2,3}$ (1) > $NI_{1,2,3}$ (2)
It's impossible to make a conclusion about the effectiveness of scenario 1 because NI cannot be used for estimation of the project value: the cost of capital is different in the two cases and real cashflows is also different from NI in the two cases.

Question 3.2.
$PV(TS) = 12 \times Tax \times Discount\ Factor(DF)_1 + 8 \times Tax \times DF_2 + 4 \times Tax \times DF_3 = 1.992 + 1.104 + 0.4632 = 3.5592$
$APV = NPV_{unlevered} + PV(TS) = 86.8732$ mln RUB