Вопрос **Инфо**

Направление «Физика»

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задачи, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Вокруг неподвижной планеты массы M, полностью покрытой океаном, вращается спутник массы m. Расстояние L от центра планеты до спутника много больше радиуса планеты R. Найти максимальную разницу в уровне поверхности океана, связанную с гравитацией спутника. Считать, что по объему планеты масса распределена равномерно.

Решение: Поверхность океана определяется условием постоянства гравитационного потенциала φ. В нашем случае потенциал складывается из потенциала гравитационного поля планеты φ_1 и потенциала гравитационного поля спутника φ_2. Потенциал гравитационного поля планеты можно записать в виде

$$\varphi_1 = -G\frac{M}{R+h} \approx -G\frac{M}{R} + G\frac{M}{R^2}h,$$

где G – гравитационная постоянная, h – отклонение расстояния до центра планеты от R, это отклонение считается много меньшим, чем R. Второе слагаемое здесь равно gh, где g – ускорение свободного падения на поверхности планеты. Потенциал гравитационного поля спутника на поверхности планеты можно записать в виде

$$\varphi_2 = -G\frac{m}{L+R\cos\theta} \approx -G\frac{m}{L} + G\frac{m}{L^2}R\cos\theta - G\frac{m}{L^3}R^2\cos^2\theta,$$

где θ – угол между направлением на спутник и направлением радиус-вектора, направленного из центра в данную точку поверхности. Таким образом, условие постоянства гравитационного потенциала записывается в виде

$$gh + G\frac{m}{L^2}R\cos\theta - G\frac{m}{L^3}R^2\cos^2\theta = const.$$

Таким образом

$$h = -\frac{mR^3}{ML^2}\cos\theta + \frac{mR^4}{ML^3}\cos^2\theta + h_0.$$

Здесь первое слагаемое соответствует сдвигу планеты, как целого, а второе означает наличие двух горбов, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (то есть на ближайшей к спутнику точке поверхности планеты и на самой удаленной от спутника точке поверхности планеты). По сравнению с минимальным значением h, которое достигается при $\theta = \pi/2$, высота этих горбов равна $\frac{mR^4}{ML^3}$. Константа h_0 находится из условия постоянства объема планеты при сдвиге h:

$$h_0 = \frac{mR^4}{ML^3}$$

Разбалловка.

	Результат	Оценка
1	Предложено соотношение между потенциалами гравитационного поля или силами, верное для данной системы	6
2	Записан потенциал гравитационного поля планеты или сила, с которой действует планета	2
3	Записан потенциал гравитационного поля спутника или сила, с которой действует спутник	2
4	Получено уравнение для нахождения уровня океана	7
5	Получен ответ	3

Задача 2. Найти кинетическую энергию, уносимую из сосуда в единицу времени за счет вылета из него в вакуум молекул газа через малое отверстие (меньше длины свободного пробега) площади S. Сосуд содержит Больцмановский газ с плотностью массы ρ и температурой T, масса молекулы газа равна m.

Решение: Обозначим v скорость молекулы газа в направлении стенки. Распределение вероятности этих молекул по скоростям дается Больцмановским фактором

$$P = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dv P = 1.$$

Нас интересуют только молекулы, движущиеся к стенке, то есть $v > 0$. Число молекул со скоростями в интервале dv, которые подлетают к отверстию в единицу времени, равно $(\rho/m) SvPdv$. Следовательно, за единицу времени вылетает N молекул:

$$N = \frac{\rho}{m} S \int_0^{\infty} dv\, v P = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} \cdot \frac{\rho}{m} S.$$

Уносимая ими кинетическая энергия складывается из двух частей, $E_1 + E_2$. Первая часть E_1 определяется энергией $k_B T$ на молекулу, которая соответствует движению вдоль стенки. Умножая эту величину на N, находим

$$E_1 = k_B T N = \frac{\rho S}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{k_B T}{m}\right)^{3/2}.$$

Вторая часть определяется энергией движения в направлении, перпендикулярном стенке:

$$E_2 = \frac{\rho}{m} S \int_0^\infty dv\, v\, P\, \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho S}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{k_B T}{m} \right)^{3/2}.$$

Итого

$$E_1 + E_2 = \rho S \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k_B T}{m} \right)^{3/2}$$

Разбалловка.

	Результат	Оценка
1	Записано распределение для поступательной степени свободы	3
2	Найдено число молекул, движущихся к стенке	7
3	Найдена уносимая энергия, связанная с движением параллельным стенке	4
4	Найдена уносимая энергия, связанная с движением перпендикулярным стенке, и получен ответ	6
5	Получена оценка / неточный ответ (в решении не производилось строгое интегрирование по функции распределения)	10-12 (в зависимости от близости полученного ответа к точному решению)

Задача 3. Найти энергию магнитного поля (на единицу длины), сосредоточенного в узком зазоре между двумя одинаковыми параллельными сверхпроводящими цилиндрами, радиусы которых R много больше размеров зазора h. Напряженность поля имеет нулевую компоненту вдоль осей цилиндров, а в середине зазора его напряженность равна B_0.

Решение: Направим ось Z вдоль зазора в направлении, перпендикулярном осям цилиндров. Расстояние между поверхностями цилиндров в зазоре можно приблизительно записать в виде

$$x = h + z^2/2.$$

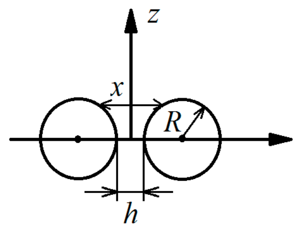

Рис. Взаимное расположение цилиндров

Магнитное поле не проникает в сверхпроводник, поэтому оно приблизительно направлено вдоль оси Z, а его напряженность B можно найти их условия постоянства потока $B_x = const$, то есть

$$B = \frac{hR}{hR + z^2} B_0$$

Плотность энергии магнитного поля в системе СИ равна $B_0/(2\mu_0)$. Следовательно, энергия магнитного поля на единицу длины цилиндра равна

$$\int dz\, x \frac{B^2}{2\mu_0} = \pi B_0^2 h^{3/2} R^{1/2}.$$

Разбалловка.

	Результат	Оценка
1	Получена зависимость ширины зазора от расстояния от точки, где зазор минимален	3
2	Получено распределение поля B вдоль оси, перпендикулярной осям цилиндров	7
3	Записана формула для плотности энергии магнитного поля	2
4	Получен ответ	8

Задача 4. Найти среднюю за период мощность излучения плоского конденсатора, на который подано переменное напряжение $U_0 \cos(\omega t)$. Известны площадь обкладок S, расстояние между ними h, и относительная диэлектрическая проницаемость ε_r диэлектрика, помещенного между обкладками.

Решение: В системе СГС емкость конденсатора равна $C = \varepsilon_r S/(4\pi h)$. Следовательно, заряды на обкладках равны

$$q = \varepsilon_r \frac{S}{4\pi h} U_0 \cos(\omega t),$$

а дипольный момент равен

$$d = \frac{qh}{\varepsilon_r} = \frac{S}{4\pi} U_0 \cos(\omega t),$$

где мы учли момент, индуцированный в диэлектрике. В системе СГС мощность, которая излучается за счет дипольного излучения, равна $2\left(\partial_t^2 d\right)^2/(3c^3)$, где c – скорость света. Усредняя эту величину по периоду, находим

$$I = \frac{\omega^4 U_0^2 S^2}{48\pi^2 c^3}$$

Разбалловка.

	Результат	Оценка
1	Записана формула для емкости конденсатора	3
2	Получено выражение для заряда на обкладках конденсатора	3
3	Определен дипольный момент	6

4	Записана формула для мощности излучения диполя	6
5	Получен ответ	2

Задача 5. Квантовая частица массы m, совершающая одномерное движение, находится в основном состоянии в поле с потенциалом $U = m\omega_1^2 x^2/2$. В момент времени $t = 0$ потенциал мгновенно меняется до $U = m\omega_2^2 x^2/2$. Найти вероятность того, что частица окажется в основном состоянии в новом потенциале.

Решение: Волновая функция основного состояния осциллятора до изменения частоты имела вид

$$\Psi_1 = \left(\frac{m\omega_1}{\pi\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega_1}{2\hbar}x^2\right).$$

После изменения функция основного состояния осциллятора стала

$$\Psi_2 = \left(\frac{m\omega_2}{\pi\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega_2}{2\hbar}x^2\right).$$

Проекция состояния Ψ_1 на состояние Ψ_2 равно

$$\int dx\,\Psi_1\Psi_2 = \omega_1^{1/4}\omega_2^{1/4}\sqrt{\frac{2}{\omega_1+\omega_2}}.$$

Вероятность оказаться в основном состоянии Ψ_2 равна квадрату этого выражения, то есть

$$\frac{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1+\omega_2}.$$

Эта величина меньше единицы, обращаясь в единицу при $\omega_1 = \omega_2$.

Разбалловка.

	Результат	Оценка
1	Уравнение Шредингера для определение волновой функции основного состояния осциллятора	2
2	Определение волновой функции основного состояния осциллятора	5
3	Найдена проекция состояния Ψ_1 на состояние Ψ_2	8
4	Вероятность оказаться в основном состоянии Ψ_2	5