Направление «Теория игр»

Памяти Андрея Бремзена

Решение задачи № 1

(а) [5 баллов] Возможно ли равновесие Нэша в чистых стратегиях, при котором не будет образована ни одна пара?

Ответ: Нет, невозможно.

Рассмотрим случай, когда не образована ни одна пара. Артем обязан был выбрать какую-то из трех девушек. Обозначим как X девушку, которую выбрал Артем. Девушка X точно написала не Артема, ведь иначе образовалась бы как минимум одна пара. Сейчас девушка X получает выигрыш 0, ведь не состоит в паре. Однако если бы она изменила стратегию и выбрала Артема, то получила бы положительный выигрыш. Следовательно, набор чистых стратегий, приводящий к нулю счастливых пар, не может являться равновесием Нэша.

(б) [5 баллов] Возможно ли равновесие Нэша в чистых стратегиях, при котором будет образована ровно одна пара?

Ответ: Да, возможно.

Пример: все парни выбирают Глафиру, все девушки выбирают Артема, причем Артем и Глафира получают наибольший для себя выигрыш в паре друг с другом.

В примере образуется ровно одна пара: Артем и Глафира. Очевидно, Артему и Глафире нет смысла менять стратегию: по построению примера они друг для друга самые предпочтительные участники. Остальным игрокам смена стратегии тоже не принесет увеличение выигрыша: увы, этих игроков никто не выбрал, значит они при любой своей стратегии они не окажутся в паре и получат нулевой выигрыш. Никому не выгодно отклоняться, следовательно, это равновесие Нэша.

(в) [5 баллов] Назовем набор стратегий оптимальным, если при нем суммарный выигрыш шести игроков максимален. Всегда ли оптимальный набор чистых стратегий является равновесием Нэша в этой игре?

Ответ: Да, всегда.

Докажем это с помощью двух простых вспомогательных утверждений.

Утверждение 1: при оптимальном наборе стратегий образуется ровно три пары.

Докажем от противного: пусть в оптимальном наборе стратегий образовалось $K < 3$ пар. Тогда найдутся как минимум одна девушка X и один парень Y, которые остались без пары. Сейчас X и Y получают нулевой выигрыш, однако если изменят свои стратегии и выберут друг друга, то получат положительный выигрыш, причем выигрыш остальных игроков не изменится. В результате смены стратегий игроков суммарный выигрыш увеличился, следовательно, этот набор стратегий не является оптимальным. Противоречие!

Утверждение 2: если набор чистых стратегий приводит к образованию трех пар, то он является равновесием Нэша.

Доказательство: при трех парах каждый из игроков получает положительный выигрыш. Легко заметить, что каждый из игроков выбран кем-то из других участников ровно один раз (тем участником, с которым образована пара). Пусть X и Y в паре, каждый получает положительный выигрыш. Если X захочет сменить стратегию и выбрать другого участника, то получит нулевой выигрыш: как мы выяснили, при таком наборе стратегий только Y выбрал X, следовательно, ни с кем другим у X не получится образовать пару. Получается, никакой игрок X не будет отклоняться, а это значит, что мы имеем дело с равновесием Нэша. Комбинация двух утверждений дает нам то, что требуется доказать.

Критерии

(а) [0 баллов] Неправильный ответ.

[1 балл] Правильный ответ без доказательства или с некорректным доказательством.

[5 баллов] Правильный ответ с корректным доказательством.

(б) [0 баллов] Неправильный ответ.

[1 балл] Правильный ответ без доказательства или с некорректным доказательством.

[5 баллов] Правильный ответ с корректным доказательством.

(в) [0 баллов] Неправильный ответ.

[1 балл] Правильный ответ без доказательства или с некорректным доказательством.

[5 баллов] Правильный ответ с корректным доказательством.

Решение задачи № 2

(а) [2 балла] В матрице G^1 чистыми равновесиями являются (A,Z) и (B,Y). Худшим из них для игрока 1 является (A,Z), для игрока 2 — (B,Y).

Найдем, при каких δ игрок 1 не захочет отклоняться от своей стратегии в фазе кооперации. Если он не отклоняется, он получает платеж $4 + 4\delta + 4\delta^2 + \ldots = \frac{4}{1-\delta}$. Если он отклоняется (выбирает B в первом периоде), то он получает сразу 7, а затем, в силу наказания, во всех оставшихся периодах платеж 2, то есть в сумме $7 + 2\delta + 2\delta^2 + \ldots = 7 + \frac{2\delta}{1-\delta}$. Он не захочет отклониться при $\frac{4}{1-\delta} \geq 7 + \frac{2\delta}{1-\delta}$, то есть при $\delta \geq 3/5$.

Аналогично, игрок 2 не захочет отклониться от стратегии в фазе кооперации, если $\frac{4}{1-\delta} \geq 5 + \frac{3\delta}{1-\delta}$, то есть при $\delta \geqslant 1/2$.

В фазе наказания никто не захочет отклониться, потому что наказание является равновесием Нэша в статической игре. Таким образом, указанный профиль стратегий является равновесием при $\delta \geqslant \max\{3/5, 1/2\} = 3/5$.

(б) [2 балла] В матрице G^2 чистыми равновесиями являются также (A,Z) и (B,Y). Для обоих игроков худшим из них является (B,Y).

Абсолютно аналогично пункту а) получаем, что стратегии являются равновесием при $\delta \geqslant \{2/5, 1/2\} = 1/2$.

(в) [16 баллов] Если игрок придерживается стратегии в фазе кооперации, то независимо от матрицы игры он получает платеж 4, что в сумме дает $\frac{4}{1-\delta}$. Поскольку нам нужно, чтобы он не отклонился ни при какой последовательности матриц, найдем его максимальный (по всем последовательностям матриц) платеж в случае отклонения.

Его лучший текущий платеж от отклонения равен $\max\{7,5\} = 7$, и достигается при матрице G^1, а его лучший платеж в фазе наказания равен $\max\{2, 5/2\} = 5/2$, и достигается при матрице G^2. Таким образом, в сумме при отклонении игрок 1 получит как максимум величину

$$7 + 5/2(\delta + \delta^2 + \ldots) = 7 + 5/2\frac{\delta}{1-\delta},$$

что достигается, если в текущий момент играется матрица G^1, а во все будущие моменты будет играться матрица G^2. Значит, игрок 1 не отклонится при $\frac{4}{1-\delta} \geq 7 + \frac{2{,}5\delta}{1-\delta}$, то есть при $\delta \geqslant 2/3$.

Аналогично, платеж игрока 2 при кооперации равен в любом случае $\frac{4}{1-\delta}$. Его максимальный платеж при отклонении составит

$$6 + 3(\delta + \delta^2 + \ldots) = 6 + \frac{3\delta}{1-\delta},$$

что достигается, если в текущий момент играется матрица G^2, а во все будущие моменты будет играться матрица G^1. Значит, игрок 1 не отклонится при $\frac{4}{1-\delta} \geq 6 + \frac{3\delta}{1-\delta}$, то есть при $\delta \geqslant 2/3$.

В фазе наказания опять-таки никто не отклонится, так как будут играться статические равновесия Нэша.

Значит, данный профиль стратегий будет равновесием при $\delta \geqslant \max\{2/3, 2/3\} = 2/3$.

Поскольку $2/3 > \max\{2/5, 1/2\}$, кооперировать в условиях неопределенности (пункт в)) строго сложнее, чем в условиях определенности (пункты а),б)).

Примечание: Задача основана на статье Rohit Lamba, Ilya Krasikov «Uncertain Dynamic Games» (work in progress)

Критерии оценивания

(1, 2) [0 баллов] Ответ, даже правильный, но без обоснования.

[0.5 балла] Корректно выписаны все условия и верно выписаны системы неравенств, однако на найдена сумма бесконечной геометрической прогрессии и, соответственно, нет верного ответа.

[1 балл] Правильный ответ с неполным доказательством или неверный ответ при верных рассуждениях и вычислениях, кроме, быть может, опечатки или ошибки в арифметике, или другой неточности.

[2 баллов] Правильный ответ с полным и подробным описанием решения.

(3) [0 баллов] Неправильный ответ. В том числе при наличии предположения о равной вероятности появления игр (довольно частая ошибка).

[2-12 баллов] Ответ с частично верными рассуждениями (в зависимости от доли правильных рассуждений и качества обоснования).

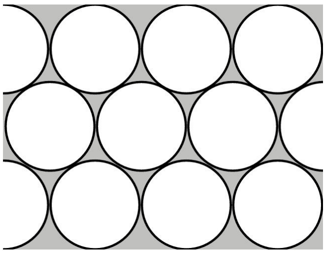
[15 баллов] Выписана формула суммы ряда, но без упоминания самого ряда или пояснения как именно она получена. При этом правильный ответ и все остальные элементы решения полно и подробно описаны.

[16 баллов] Правильный ответ с полным и подробным описанием решения.

Решение задачи № 3

При $K = 2,3,4$, можно явно описать Анину стратегию, нарисовав картинки и рассмотрев случаи, но мы не будем этого делать. Оказывается, Аня выигрывает даже при $K = 10$ (является ли $K = 10$ максимальным — открытый вопрос).

А доказать это можно так: Представим что Аня покрыла монетками всю плоскость, как показано на картинке (плотная треугольная упаковка окружностей).



Доля «дырок», т.е. непокрытой части плоскости равна $p = 1 - \pi\sqrt{3}/6$ (школьная геометрия в помощь) что лежит в интервале (0, 0.1) (калькулятор, знание чему равно π, или ряд Тейлора в помощь). Рассмотрим случайный сдвиг этого покрытия. Тогда любая заданная точка не покрыта с вероятностью p. Если точек K, то математическое ожидание числа непокрытых точек равно Kp (матожидание линейно). Если $K = 10$ или меньше, то математическое ожидание числа непокрытых точек меньше 1. Число покрытых точек — целочисленная неотрицательная случайная величина. Если ее матожидание меньше одного, это значит, что с положительной вероятностью она равна нулю. Значит существует такой сдвиг плотной треугольной упаковки, который покрывает любые заданные 10 точек. Ура!

Примечание: Задача основана **на известной задаче**

Критерии оценивания

а) Выполнено полностью верно – 1 балл, иначе 0.

б)

- при доказательстве для k=3 рассмотрели и доказали не все варианты расположения точек относительно друг друга – 4 балла
- доказали для k=3 – 9 баллов
- при доказательстве для k=4 (или k=5) рассмотрели и доказали не все варианты расположения точек относительно друг друга – 9 баллов
- доказали для k=4 – 18 баллов (не наибольший, потому что для большего количества k возможно было это сделать)

Решение задачи № 4

Рассмотрим следующий пример набора предпочтений. Студенты обозначены по первым буквам имени. В начале каждой строки имя студента или студентки, после двоеточия отранжированный список личных предпочтений игрока от наиболее предпочтительных представителей противоположного пола к наименее предпочтительным.

А : Е > З > Ж > И
Б : Е > З > Ж > И
В : Е > З > Ж > И
Г : И > З > Ж > Е
Е : В > А > Б > Г
Ж : В > А > Б > Г
З : А > Б > В > Г
И : Г > Б > В > А

Заметим, что если стабильный мэтчинг существует, то Георгий и Ирина должны быть вместе. Они первые приоритеты друг у друга, значит, если они окажутся в разных парах, то уйдут от своих текущих партнеров друг к другу. Так как у Ирины нет «ограничения на сестру», она руководствуется только собственными предпочтениями.

Зафиксируем пару Георгий – Ирина. Нам остается рассмотреть 3! = 6 способов распределения оставшихся девушек по оставшимся парням. Рассмотрим их, будем писать пары через запятую по первым буквам студента и студентки.

1. АЕ, БЖ, ВЗ. Не будет стабильным: Богдан и Зоя заблокируют (для Богдана Зоя предпочтительнее Жанны, а для Зои Богдан предпочтительнее Владимира).
2. АЕ, БЗ, ВЖ. Владимир и Елена заблокируют (Елена на данный момент не может оказаться в одном городе с сестрой, поэтому действует строго в соответствии со своими предпочтениями).
3. АЖ, БЕ, ВЗ. Антон и Зоя заблокируют.
4. АЖ, БЗ, ВЕ. Богдан и Елена заблокируют. (Хоть Елена и находится на данный момент с самым предпочтительным партнером, если она уйдет к Богдану, то окажется с сестрой Жанной в одном городе, а это для Елены важнее).
5. АЗ, БЕ, ВЖ. Владимир и Елена заблокируют.
6. АЗ, БЖ, ВЕ. Антон и Елена заблокируют.

Мы рассмотрели все шесть случаев, и ни в одном из них не оказалось стабильности. Это значит, что мы построили пример, когда найти стабильное разбиение на пары невозможно! Будем надеяться, что молодому программисту повезет и для предпочтений его ребят все-таки получится создать крепкие пары.

Примечание: приведенный контрпример не единственный. Решение расписано подробно исключительно для того, чтобы сделать его максимально понятным и наглядным. От участников олимпиады не требуется задавать целиком все предпочтения всех ребят и расписывать все 6 (или 24) случаев: достаточно обосновать, почему получится «цикл» и ни один мэтчинг не будет стабильным.

Ответ: нет.

Критерии оценивания

[0 баллов] Неверный ответ.

[5 баллов] Верный ответ без верного контрпримера или с некорректным контрпримером.

[15 баллов] Верный ответ с корректным контрпримером.

Решение задачи № 5

Пусть первый игрок разрезал пирог на два куска, которые имеют ценность $\alpha \le \frac{1}{2}$ и $\beta = 1 - \alpha \ge \frac{1}{2}$ с точки зрения второго игрока. Покажем что второй игрок всегда может гарантированно получить хотя бы 1/3 ценности. В самом деле, если $\alpha \in [1/3\,, 1/2]$, то второй игрок делит больший кусок на две части ценности α и $\beta - \alpha$. Если же $\alpha \le \frac{1}{3}$, то больший кусок делится на две равные части т.е. ценности $\beta/2$ и $\beta/\ 2$. Как мы видим, в обоих случаях имеются два куска ценности хотя бы 1/3 , а значит второй игрок, который берет кусок вторым, гарантированно получает хотя бы 1/3 ценности. Чтобы убедиться, что этот результат не может быть улучшен, достаточно рассмотреть случай $\alpha = 1/\ 3$ при котором, как бы второй игрок ни поделил один из кусков, хотя бы два из получившихся кусков будут иметь ценность не превосходящую 1/3.

Критерии оценивания

[0 баллов] Ответ без доказательства и объяснений или отсутствие решения задачи.

[2-6 балла] Ответ с частично верными рассуждениями (в зависимости от доли правильных рассуждений и качества обоснования).

[7-9 баллов] Верный ответ для частного случая (в зависимости качества обоснования). Частая ошибка - в предположении одинаковых функций ценности двух игроков. В общем же случае эти функции не одинаковы, просто нам неважно как оценивает первый игрок свои куски, которые он делит на первом этапе, и все рассуждения о ценностях кусков надо проводить в точки зрения второго участника дележа.

[10 баллов] Верный ответ с корректным объяснением.

Решение задачи № 6

(a) Понятно, что выбор слабых спортсменов не влияет на оптимальную стратегию сильных. Сильные атлеты, пойдя к Агамемнону получают платеж порядка $1/m_A$ с вероятностью 1, где m_A – число сильных спортсменов, предпочитающих состязания Агамемнона. А у Менелая, чтобы оказаться лидером с вероятностью порядка $1/m_N$, атлет должен быть сильнее остальных m_N атлетов, что происходит, если длина прыжка x больше величины порядка $(x)^{mN}$. Тогда отсечка проходит по уровню x логарифмического порядка от числа атлетов. То есть к Менелаю идут атлеты из квантили вида $(1 - log(m))/m$ самых сильных атлетов. Это меньше, чем к Агамемнону, но это и не одна точка $x = 5$.

(b) Если бы в турнире были только слабые спортсмены, то в равновесии ожидаемо у обоих царей было бы равное число участников. Однако у нас есть еще и сильные, причем из (a) следует, что у Агамемнона ожидается больше спортсменов, чем у Менелая. Слабый игрок, выбирая олимпиаду, должен предполагать теперь, что он сможет выиграть у данного царя только в том случае, если волею распределения к нему не попадет ни одного сильного спортсмена. Поскольку распределение равномерное, то вероятность НЕ встретить сильных вообще выше у Менелая. К этому можно относиться как к более высокому ожидаемому призу у него. Тогда к Менелаю пойдет больше слабых спортсменов. Однако не все слабые пойдут к Менелаю: в какой-то момент с учетом числа слабых у Менелая станет больше спортсменов, чем у Агамемнона, так что небольшая часть самых слабых всё равно предпочтет игры Агамемнона, т.к. у Менелая ей не выиграть как из-за самых сильных, так и из-за самых сильных среди слабых. При этом очевидно, что отсечка по слабым пройдет ближе к минимальной длине $x = 3$, т.е. слабых меньше у Агамемнона.

(c) Назовем сильными (strong) спортсменов, которые способны перепрыгнуть целиком короткую яму, т.е. имеют $x > 4.5$. Ожидаемое число таких спортсменов в силу равномерного распределения длины прыжков равно $n/4$, вероятность, что случайно взятый прыгун принадлежит этой группе $1/4$. Предположим, что с точки зрения стороннего наблюдателя в равновесии он наблюдает, что такой прыгун выбрал игры у Менелая с вероятностью p_s^M и игры Агамемнона с вероятностью $p_s^A = 1 - p_s^M$. Легко видеть, что $p_s^M \in (0, 1)$, т.е. равновесие, где все сильные прыгуны едут на игры только к одному царю, невозможно. Рассмотрим теперь отдельно взятого сильного прыгуна с длиной прыжка $x > 4.5$. Пусть он «идеально предсказывает» поведение остальных прыгунов в соответствии с вероятностями, введенными выше. Заметим, что поведение слабых (weak) прыгунов его не интересует, поскольку у них он точно выиграет. Будем пользоваться упрощающим предположением, что n так велико, что отклонение одного игрока не меняет ожидаемое число игроков на каждых играх (можно решать аккуратно и без этого предположения, но вычисления будут более громоздкими − тогда нужно показать невыгодность отклонения с учетом пересчета количества прыгунов при отклонении).

$$Eu_s(A) = \frac{1}{p_s^A \cdot n/4}$$

$$Eu_s(M) = \left(\frac{x-4.5}{0.5}\right)^{p_s^M \cdot n/4}$$

Прыгун с длиной прыжка x выберет игры Менелая, если второе выражение больше первого, что дает

$$\frac{x-4.5}{0.5} > \left(\frac{1}{p_s^A \cdot n/4}\right)^{1/(p_s^M \cdot n/4)},$$

т.е. его длина прыжка должна быть достаточно высока, выше некоторого порогового значения $\bar{x}$. Это значение делит всех сильных прыгунов на две категории: прыгуны с длиной прыжка $x \in (4.5, \bar{x})$ едут к Агамемнону, прыгуны с $x \in (\bar{x}, 5)$ − к Менелаю.
Тогда вероятность, что случайный прыгун выберет Агамемнона равна вероятности попасть в указанный интервал, т.е.

$$p_s^A = \frac{\bar{x}-4.5}{0.5} = \left(\frac{1}{p_s^A \cdot n/4}\right)^{1/(p_s^M \cdot n/4)}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$(p_s^A)^{1/(p_s^M \cdot n/4)} = \left(\frac{1}{p_s^A \cdot n/4}\right)$$

Левая часть уравнения является возрастающей функцией на (0,1), а правая − убывающей. Сравнив значения на концах интервала, получим, что уравнение должно иметь ровно один корень, а сравнив значения в точке $1/2$ легко убедиться, что этот корень $p_s^A > 1/2$.
Тогда значение трешхолда определяется как $\bar{x} = 4.5 + 0.5 p_s^A$ и мы полностью описали стратегию сильного прыгуна в зависимости от длины прыжка.

Теперь перейдем к слабому прыгуну (weak, $x < 4.5$). Применим аналогичную логику: введем вероятности p_w^M и $p_w^A = 1 - p_w^M$ посетить игры Менелая и Агамемнона, соотвественно. Рассмотрим отдельного слабого прыгуна с длиной прыжка $x < 4.5$.

$$Eu_w(A) = \left(\frac{x-3}{1.5}\right)^{p_w^A 3n/4} (p_s^M)^{n/4},$$

т.е. он победит на играх Агамемнона, если прыгает дальше всех среди слабых, пошедших к Агамемнону (их $p_w^A 3n/4$ прыгунов), и при этом все сильные отправятся к Менелаю. Аналогично

$$Eu_w(M) = \left(\frac{x-3}{1.5}\right)^{p_w^M 3n/4} (p_s^A)^{n/4}$$

Прыгун с длиной прыжка x выберет игры Менелая, если второе выражение больше первого, что дает

$$\left(\frac{x-3}{1.5}\right)^{(p_w^A - p_w^M)3n/4} < \left(\frac{p_s^A}{p_s^M}\right)^{n/4}$$

Правая часть больше 1. Если степень в левой части положительна, $p_w^A > p_w^M$, то неравенство выполняется всегда, т.е. все предпочтут игры Менелая при любом x, что дает $p_w^A = 0$. Противоречие с самим неравенством.

Значит, должно выполняться $p_w^A < p_w^M$. Отсюда

$$\frac{x-3}{1.5} > \left(\frac{p_s^A}{p_s^M}\right)^{\frac{1}{s(p_w^A - p_w^M)}}$$

Т.е. слабый прыгун выберет игры Менелая только если его длина прыжка досточно высока, выше некоторого порогового значения $\underline{x}$. Это значение делит всех слабых прыгунов на две категории: прыгуны с длиной прыжка $x \in (3,\ \underline{x})$ едут к Агамемнону, прыгуны с $x \in (\underline{x}, 4.5)$ – к Менелаю.
Тогда вероятность, что случайный прыгун выберет Агамемнона равна вероятности попасть в указанный интервал, т.е.

$$p_w^A = \frac{\underline{x}-3}{1.5} = \left(\frac{p_s^A}{p_s^M}\right)^{\frac{1}{3(2p_w^A - 1)}}$$

Левая часть уравнения возрастает как функция p_w^A, а правая убывает на $(0,0.5)$.

Проверив пределы на краях, получаем, что существует единственное решение, причем оно в правильном промежутке меньше $1/2$.

Тогда значение трешхолда определяется как $\underline{x} = 3 + 1.5p_w^A$, и мы полностью описали стратегию слабого прыгуна в зависимости от длины прыжка.
Заметим, что в решении игры наблюдается немонотонность выбора в зависимости от длины прыжка: по мере увеличения x спортсмены сначала идут к Агамемнону, потом к Менелаю, потом опять к Агамемнону и потом опять – самые сильные – к Менелаю.

Критерии оценивания

2–3 балла в (a) и (b) давалось за правильный ответ, но с существенным дефектом в обосновании.

5 баллов в (a) давалось за близкую логику без аккуратной оценки массы сильных спортсменов, выбравших Менелая.

10+ баллов за всё задание можно было получить в зависимости от успешности описания трешхолдов при условии, что верно учтена степенная вероятность выигрыша у Менелая.

Частая ошибка: не считали ожидаемую полезность и полагали, что у Менелая может победить только игрок с длиной 5, при большом числе игроков. Но ведь при большом числе игроков и ожидаемая полезность приза у Агамемнона стремится к нулю, так что надо сравнивать.

Еще одна частая ошибка: считали, что если число спортсменов велико, то сильные будут у обоих царей, а значит для слабых вероятность выиграть 0 у обоих и им всё равно к кому идти.