Направление «Прикладная математика»

Инвариантная часть

Вопрос 1

Solution:

Вероятность ошибки первого рода равна:

$$\alpha = P(H_1|H_0) = P\left(max(X_1, X_2, X_3) < \frac{3}{2}|H_0\right) = \left(F_{X_1}\left(\frac{3}{2}\right)^3 |H_0\right)$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{3}{2}\lambda_0}\right)^3 = 0.125$$
$$1 - e^{-\frac{3}{2}\lambda_0} = 0.5$$
$$e^{-\frac{3}{2}\lambda_0} = 0.5$$
$$-\frac{3}{2}\lambda_0 = \ln 0.5$$
$$\lambda_0 = -\frac{0.693}{\left(-\frac{3}{2}\right)} \approx 0.46$$

Вероятность ошибки второго рода равна:

$$\beta = P(H_0|H_1) = P\left(max(X_1, X_2, X_3) \geq \frac{3}{2}|H_1\right)$$
$$= 1 - P\left(max(X_1, X_2, X_3) < \frac{3}{2}|H_1\right) = 1 - \left(F_{X_1}\left(\frac{3}{2}\right)^3 |H_1\right)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}\right)^3 = 0.488$$
$$1 - e^{-\frac{3}{2}\lambda_1} = 0.8$$
$$e^{-\frac{3}{2}\lambda_1} = 0.2$$
$$-\frac{3}{2}\lambda_1 = \ln 0.2$$

$$\lambda_1 = -\frac{1.609}{\left(-\frac{3}{2}\right)} \approx 1.07$$

Answer: $\lambda_0 \approx 0.46, \lambda_1 \approx 1.07.$

Вопрос 2

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Применен метод, соответствующий маленькому количеству наблюдений (применен непараметрический метод -тест Вилкоксона или перед применением параметрического метода данные проверены на нормальность/указана необходимость проверки на нормальность), без ошибок - 11 баллов, с незначительными ошибками - 9-10 баллов	9 - 11 баллов
Применен параметрический метод без проверки данных на нормальность с учетом степеней свободы и несмещенной оценкой дисперсии без ошибок - 8 баллов, без поправки на степени свободы или несмещенную оценку дисперсии, но без других ошибок - 7-6 баллов, с ошибками и без поправок на размер выборки - 5 баллов	8-5 балов
Заход на верный или подходящий метод, но без полноценных расчетов ИЛИ неподходящий метод с расчетами и выводом	3-4 балла
Сделано верное предположение по поводу выбора метода/захода, но расчетов нет	1-2 балла
Нет расчетов и верного предположения относительно применяемого метода	0 баллов

Решение (непараметрический тест Вилкоксона)

n1=9 -меньшая по объему выборку -лига Б. Сумма рангов по результативности в выборке команд из лиги Б = 78,5

n2=11 -большая по объему выборку -лига А. Сумма рангов по результативности в выборке команд из лиги А =131,5

$$z = \frac{R - \mu_R}{\delta_R}$$

R-сумма рангов в меньшей по объему выборке

$$\mu_R = \frac{n1(n1+n2+1)}{2} = \frac{9(9+11+1)}{2} = \frac{9*21}{2} = 94.5$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{n1*n2(n1+n2+1)}{12}} = \sqrt{\frac{9*11(9+11+1)}{12}} = \sqrt{\frac{2079}{12}} = \sqrt{173.25} = 13.16$$

$$z = \frac{78.5 - 94.5}{13.6} \approx -1.22$$

Zкритическое =+- 1,96

Zнаблюдаемое =-1,22

Нет оснований отвергнуть проверяемую статистическую гипотезу о равенстве сумм рангов по результативности среди команд обоих лиг. При имеющихся данных на уровне доверительной вероятности 95% значимых различий в результативности команд из лиг А и Б нет.

Вопрос 3

Решение

Разложение вектора y по векторам ***x1, x2, x3*** имеет вид:

y = ax1 + bx2 + cx3.

Для того, чтобы данное разложение было единственным, необходимо, чтобы система уравнений

$$\begin{pmatrix} 1-k & 5-4k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \\ 1-k & 1-k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

имела единственное решение. Для этого необходимо, чтобы матрица в левой части равенства была невырожденной.

Напишем выражение для определителя матрицы:

$(1 - k)(1 - (1 - k)^2) - (5 - 4k)(1 - (1 - k)^2) - ((1 - k) - (1 - k)) =$
$= (1 - k - 5 + 4k)(1 - (1 - k)^2) = (3k - 4)(1 - (1 - k)^2)$

Данное выражение отлично от нуля при всех значениях k кроме

$k = 4/3$; $k = 0$; $k = 2$

Критерии оценивания

16 баллов: обоснованное решение, правильный ответ.
9–15 баллов: верно составлены уравнения, но корни корректно вычислены некорректно.
8 баллов: верно описан алгоритм нахождения значений параметра, но корни не найдены.
1–7 баллов: описана попытка решения задачи, в которой есть частично корректные шаги, приближающие к решению.
0 баллов: решение отсутствует вовсе либо присутствует набор цифр и слов, к решению никак не приближающий.

Трек «Математические методы анализа в экономике»

Вопрос 4

Решение

Вариант 1

1. Преобразуем исходное выражение внутри предела:

$$x^2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x}} - 2\sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) .$$

2. Разложим оба радикала в ряд Тейлора с использованием замены $y = 4/x$ и $z = 2/x$ ($y \to 0, z \to 0$ при $x \to \infty$):

$$\sqrt{1 + \frac{4}{x}} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) ;$$
$$\sqrt{1 + \frac{2}{x}} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) .$$

3. Вычисление предела:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1 + 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{x^2} = -1 .$$

Критерии оценивания.

1. Идея вынести x^2 за скобки и попытка разложения радикалов в ряд Тейлора — 1,5 балла.

2. Получено верное разложение радикала в ряд Тейлора (пункт 2) — 2 балла за каждый.

3. Верное вычисление предела и конечный ответ (пункт 3) — 1 балл.

Вариант 2

1. Используем замену переменной $z = \frac{1}{x}$, тогда выражение внутри предела при-

мет вид:

$$\frac{1}{z^2} + \sqrt{\frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^3}} - 2\sqrt{\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3}} = \frac{1}{z^2} + \sqrt{\frac{1 + 4z}{z^4}} - 2\sqrt{\frac{1 + 2z}{z^4}} = \\ = \frac{1}{z^2}\left(1 + \sqrt{1 + 4z} - 2\sqrt{1 + 2z}\right) .$$

2. Проводим дальнейшее преобразование (умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое выражение):

$$\frac{\left(1 + \sqrt{1 + 4z} - 2\sqrt{1 + 2z}\right)\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)}{z^2\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1 + \sqrt{1 + 4z}\right)^2 - 4(1 + 2z)}{z^2\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)} = \frac{1 + 1 + 4z + 2\sqrt{1 + 4z} - 4 - 8z}{z^2\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{1 + 4z} - 2z - 1)}{z^2\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)} .$$

3. Ещё раз умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое выражение:

$$\frac{2(\sqrt{1 + 4z} - 2z - 1)(\sqrt{1 + 4z} + 2z + 1)}{z^2\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)\left(\sqrt{1 + 4z} + 2z + 1\right)} =$$

$$= \frac{2(1 + 4z - (2z + 1)^2)}{z^2\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)\left(\sqrt{1 + 4z} + 2z + 1\right)} =$$

$$= \frac{2(1 + 4z - 4z^2 - 4z - 1)}{z^2\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)\left(\sqrt{1 + 4z} + 2z + 1\right)} =$$

$$= \frac{-8}{\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)\left(\sqrt{1 + 4z} + 2z + 1\right)} .$$

4. Вычисление предела. Переменная $z \to 0$ при $x \to \infty$, тогда:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{-8}{\left(1 + \sqrt{1 + 4z} + 2\sqrt{1 + 2z}\right)\left(\sqrt{1 + 4z} + 2z + 1\right)}\right) = \frac{-8}{4\cdot 2} = -1 .$$

Критерии оценивания.

1. Замена переменной и вынос за скобки общего множителя (пункт 1) — 1,5 балла.
2. Верное умножение на сопряжённое выражение и последующее упрощение (пункт 2) — 2 балла.
3. Верное умножение на сопряжённое выражение и последующее упрощение (пункт 3) — 2 балла.
4. Верное вычисление предела и конечный ответ (пункт 4) — 1 балл.

Вопрос 5

Solution.

a) The estimator is unbiased if $E(\hat{p}) = p$ for each $p \in (0; 1)$.

$$E(\hat{p}) = P(\hat{p} = 1) = P(X_1 = 0) = (1-p)^0 p = p$$

Hence, $\hat{p}$ is unbiased.

b) Likelihood function:

$$L(X_1, \dots, X_n; p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i} p$$

Log-likelihood:

$$\ln L(X_1, \dots, X_n; p) = \sum_{i=1}^{n} (X_i \ln(1-p) + \ln p) = (\ln(1-p)) \sum_{i=1}^{n} X_i + n \ln p$$

The first order condition:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = -\frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{p} = 0$$

Multiplying by $p(1-p)$ we get the following:

$$-p \sum_{i=1}^{n} X_i + n(1-p) = 0$$

$$n - np - p \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$n = p \left(n + \sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

The solution is

$$p^* = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

The second derivative:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{1}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{p^2} < 0.$$

The second order condition is satisfied, so

$$p^* = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

is the maximum likelihood estimator.

Вопрос 6

Solution

1) P-value is less than confidence level, H0 is rejected
2) Test statistics is:

$$Z_t = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Alternative hypothesis is one-sided, so we need to find 0.997 quantile of standard normal distribution. It equals 2.75. So, substituting $p_0 = 0.5$ and $n = 400$

$$Z_t = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{400}}} = 2.75$$

$$\frac{\hat{p} - 0.5}{\frac{0.5}{20}} = 2.75$$

$$40(\hat{p} - 0.5) = 2.75$$

$$\hat{p} = \frac{2.75}{40} + 0.5 = 0.56875$$

3) Confidence interval is $\hat{p} \pm z_{0.975} \sqrt{\frac{0.5 \cdot (1-0.5)}{n}}$. Hence:

$$[0.56875 - 1.96\sqrt{\frac{0.5 \cdot (1-0.5)}{400}}; 0.56875 + 1.96\sqrt{\frac{0.5 \cdot (1-0.5)}{400}}]$$

$$[0.51975; 0.61775]$$

Вопрос 7

Solution

1. First, let us find the distribution function of $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$F_{\xi_n}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_{\xi_n}(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{\gamma_n}{t^2+\gamma_n^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}, \gamma_n > 0.$$

One could also notice that $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \mathcal{C}(0, \gamma_n)$ (Cauchy distribution with parameters 0 and $\gamma_n > 0$).

Second, it can be checked that it is impossible to determine what random variable our sequence converges in distribution to. It can be only defined that this random variable equals to a constant a.s. (but not to a zero, perhaps).

So, let us check whether $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges in probability to 0 or not. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$ if $\mathbb{P}\{|\xi_n - 0| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Let us have a look on the probability in the RHS of this expression:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|\xi_n - 0| > \varepsilon\} &= 1 - \mathbb{P}\{|\xi_n - 0| \le \varepsilon\} = 1 - \mathbb{P}\{-\varepsilon \le \xi_n \le \varepsilon\} = \\ &= 1 - (\mathbb{P}\{\xi_n \le \varepsilon\} - \mathbb{P}\{\xi_n \le -\varepsilon\}) = 1 - (F_{\xi_n}(\varepsilon) - F_{\xi_n}(-\varepsilon)) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\varepsilon}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{-\varepsilon}{\gamma_n}\right) - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

As can be seen, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$. Convergence in distribution follows from convergence in probability, namely, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$.

2. Let us start from the first term $\sqrt{\xi_n+1}$. We already know that $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$. Let us consider a function $g(x) = \sqrt{(x+1)}$. By continuous mapping theorem (Mann-Wald theorem), $g(\xi_n) = \sqrt{(\xi_n+1)}$ converges in probability to $g(0) = \sqrt{(0_n+1)} = 1$. So, $\sqrt{(\xi_n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1$.

   Now let us consider the second term $0.5\eta_n$. As $\eta_n \sim \mathcal{U}([0,2])$, it can be shown that $0.5\eta_n \sim \mathcal{U}([0,1])$:

$$F_{0.5\eta_n}(x) = \mathbb{P}\{0.5\eta_n \le x\} = \mathbb{P}\{\eta_n \le 2x\} = \frac{2x}{2} = x, x \in [0,1].$$

   By Slutskiy theorem, as $\sqrt{(\xi_n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1$ and $0.5\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \eta$, $\eta \sim \mathcal{U}([0,1])$, then $\sqrt{(\xi_n+1)} - 0.5\eta_n$ converges in distribution to $1-\eta$. It can be show that $1-\eta \sim \mathcal{U}([0,1])$:

$$F_{1-\eta}(x) = \mathbb{P}\{1-\eta \le x\} = \mathbb{P}\{\eta > 1-x\} = 1 - \mathbb{P}\{\eta \le 1-x\} = \\ = 1-(1-x) = x, x \in [0,1].$$

3. Actually it is not possible to use the law of large numbers (LLN) in this case. We provide one proof below but is can also be shown that the mathematical expectation is not defined for Cauchy distribution but it is an assumption of the LLN.

   The LLN (under some assumptions) states that the mean of independent and identically distributed random variables converges in probability to their mathematical expectation. It means that this convergence is also a convergence in distribution.

   Let us calculate the characteristic function of ψ_n:

$$\phi_{\psi_n}(t) = \mathbb{E}e^{it\psi_n} = \mathbb{E}e^{it\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i} = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{\infty} e^{it\frac{\xi_i}{n}}\right) = \prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}e^{it\frac{\xi_i}{n}} = \prod_{i=1}^{\infty}\phi_{\psi_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \\ = \left(e^{-\gamma\left|\frac{t}{n}\right|}\right)^n = e^{-\gamma|t|} = \phi_{X_1}(t).$$

   We get that the characteristic function of ψ_n equals to the the characteristic function of ξ_1. That means $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_1$. As ξ_1 is not a constant a.s., the LLN is not applied for ψ_n.

Вопрос 8

Solution:

$$y = \int 2x \cdot \ln(x^2+1) e^{ln^2((x^2+1)^4)} darctg(x)$$

$$y = \int \frac{2x \cdot \ln(x^2+1) e^{ln^2((x^2+1)^4)}}{x^2+1} dx$$

$$y = \int \ln(x^2+1) e^{ln^2((x^2+1)^4)} d\ln(x^2+1)$$

$$y = \frac{1}{2} \int e^{ln^2((x^2+1)^4)} d(\ln(x^2+1))^2$$

$$y = \frac{1}{32} \int e^{16ln^2(x^2+1)} d\left(16 \cdot ln^2(x^2+1)\right)$$

$$y = \frac{1}{32} e^{16ln^2(x^2+1)} + C$$

$$y(0) = \frac{1}{32} e^{16ln^2(0^2+1)} + C = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{32} + C = \frac{1}{8}$$

$$C = \frac{3}{32}.$$

Answer:

$$y = \frac{1}{32} e^{16ln^2(x^2+1)} + \frac{3}{32}$$

Вопрос 9

Решение

С помощью прямых, но громоздких, вычислений можно установить, что

$$F(x_1, x_2) = \det(A(x_1, x_2)) = x_1x_2 \text{ и } G(x_1, x_2) = tr(A(x_1, x_2)) - 1 = x_1 + x_2 - 1$$

Следовательно, исходная задача преобразуется в эквивалентную — найти условный экстремум $F(x_1, x_2) = x_1x_2$ при условии, что $G(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 = 0$.

Для решения данной задачи можно использовать метод множителей Лагранжа, но можно обойтись и без него. Оба подхода допустимы и равнозначны. Достаточно в условии выразить x_2 через x_1, подставить $x_2 = x_2(x_1)$ в оптимизируемую функцию, найти и исследовать точки экстремума функции одной переменной $H(x_1) = x_1(1 - x_1)$.

Очевидно, что она достигает максимума в точке $x_1 = 1/2$, поскольку вторая производная меньше нуля, что дает решение исходной задачи — точкой условного экстремума является $x_1 = x_2 = 1/2$, условный экстремум является максимумом.

Критерии оценивания

Переход к эквивалентной постановке задачи – 4 балла

Решение эквивалентной задачи – 2.5 балла

Вопрос 10

Ответ: $\left\{-10, -\frac{13}{4}\right\}$.

Решение.

1. Для того, чтобы матрица была недиагонализуема над полем комплексных чисел необходимо, чтобы ее характеристический многочлен $p(\lambda)$ имел кратные корни. Для этого надо, чтобы выполнялось условие
$$\begin{cases} p(\lambda) = 0 \\ p'(\lambda) = 0 \end{cases}$$

2. Находим характеристический многочлен матрицы $A(\alpha)$
$$p(\lambda) = |A(\alpha) - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2\alpha+1 & 3-3\alpha \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + (7+\alpha)\lambda + 1.$$

Проверка вычисления определителя в WolframAlpha (кликабельно).

3. Составляем и решаем указанную в п. **??** систему.
$$\begin{cases} p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + (7+\alpha)\lambda + 1 = 0 \\ p'(\lambda) = -3\lambda^2 + 6\lambda + (7+\alpha) = 0 \end{cases}$$
Заменяем первое уравнение системы на разность первого уравнения и второго уравнения, умноженного на λ:
$$\begin{cases} 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1 = 0 \\ -3\lambda^2 + 6\lambda + (7+\alpha) = 0 \end{cases}$$
Полученная система, очевидно, равносильна исходной.
Корень $\lambda = 1$ первого уравнения легко угадывается, остальные находятся с помощью стандартной процедуры деления многочленов. Для каждого найденного корня λ первого уравнения соответствующее значение α находим из второго. Таким образом получаются следующие два решения:
$$\lambda = 1, \alpha = -10 \text{ и } \lambda = -\frac{1}{2}, \alpha = -\frac{13}{4},$$
т.е. при $\alpha = -10$ характеристический многочлен матрицы $A(\alpha)$ имеет кратный корень 1, при $\alpha = -\frac{13}{4}$ характеристический многочлен матрицы $A(\alpha)$ имеет кратный корень $-\frac{1}{2}$, а при всех других значениях α характеристический многочлен матрицы $A(\alpha)$ не имеет кратных корней и, следовательно, матрица $A(\alpha)$ диагонализуема над полем $\mathbb{C}$.

Проверка решения системы в WolframAlpha (кликабельно).

4. Остается проверить, будут ли матрицы $A(-10)$ и $A\left(-\frac{13}{4}\right)$ диагонализуемы.

   (a) Рассмотрим матрицу

   $$A(-10) - 1\cdot E = \begin{pmatrix} 1 & -19 & 33 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Очевидно, ее ранг не меньше 2 (поскольку она содержит ненулевой минор второго порядка), а значит, равен 2. Поэтому геометрическая кратность собственного значения $\lambda = 1$ матрицы $A(-10)$ равна $3 - \operatorname{rank}(A(-10) - 1\cdot E) = 1$, меньше алгебраической кратности. Значит, матрица $A(-10)$ не диагонализуема.

   (b) Аналогично рассмотрим матрицу

   $$A\left(-\frac{13}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot E = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{51}{4} \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Она не диагонализуема по тем же соображениям.

Критерии оценивания (исходя из максимума 6,5 балла).

1. Сведение задачи к нахождению кратных корней характеристического многочлена – 1 балл.
2. Сведение задачи о нахождении кратных корней к системе $\begin{cases} p(\lambda) = 0 \\ p'(\lambda) = 0 \end{cases}$ – еще 1,5 балла.
3. Решение полученной системы – еще 2 балла.
4. Корректное исследование случаев $\alpha = -10$ и $\alpha = -\dfrac{13}{4}$ – еще 2 балла.

Вопрос **11**

Ответ:

(a) 0.

(b) Следующие три формы ответа приемлемы:

$$\frac{\ln(c)}{2\sqrt{c-b^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{c-b^2}}\right)\right) =$$
$$\frac{\ln(c)}{2\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{b}{\sqrt{c-b^2}}\right) =$$
$$\frac{\ln(c)}{2\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{c-b^2}}{b}\right).$$

Решение.

1. Решаем пункт (a). Обозначим $I = \int\limits_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+2bx+1}\,dx$. Подстановка $x = \frac{1}{t}$ дает

   $$I = \int\limits_\infty^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2} + 2b\frac{1}{t} + 1}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt = -\int\limits_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+2bt+t^2}\,dt = -I,$$

   откуда $I = 0$.

2. Сводим общий случай к частному с помощью подстановки $x = z\sqrt{c}$:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+2bx+c}\,dx = \int_0^\infty \frac{\ln(z\sqrt{c})}{cz^2+2b\sqrt{c}z+c}\cdot\sqrt{c}\,dz =$$
$$\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\int_0^\infty \frac{\ln(\sqrt{c})}{z^2+2\frac{b}{\sqrt{c}}z+1}\,dz + \int_0^\infty \frac{\ln(z)}{z^2+2\frac{b}{\sqrt{c}}z+1}\,dz\right) =$$
$$\frac{\ln(c)}{2\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{1}{z^2+2\frac{b}{\sqrt{c}}z+1}\,dz$$

3. Интеграл $\int_0^\infty \frac{1}{z^2+2\frac{b}{\sqrt{c}}z+1}\,dz$ берется стандартными методами:

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^2+2\frac{b}{\sqrt{c}}z+1}\,dz = \int_0^\infty \frac{1}{\left(z+\frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(1-\frac{b^2}{c}\right)}\,dz = \int_{\frac{b}{\sqrt{c}}}^\infty \frac{1}{u^2+\left(1-\frac{b^2}{c}\right)}\,du =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{c}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-\frac{b^2}{c}}}\right)\Bigg|_{\frac{b}{\sqrt{c}}}^{\infty} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c-b^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{c-b^2}}\right)\right)$$

4. Окончательно, искомый интеграл в пункте (b) есть

$$\frac{\ln(c)}{2\sqrt{c-b^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{c-b^2}}\right)\right) = \frac{\ln(c)}{2\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{b}{\sqrt{c-b^2}}\right) = \frac{\ln(c)}{2\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{c-b^2}}{b}\right).$$

Проверка в WolframAlpha при b = 3, c = 10 (кликабельно),
Проверка в WolframAlpha при b = 4, c = 20 (кликабельно),
Проверка в WolframAlpha при b = 1, c = 7 (кликабельно).

Критерии оценивания

1. Пункт (a) - 2,5 балла.
2. Сведение общего случая к частному - ещё 2,5 балла.
3. Верные вычисление стандартного интеграла и получение правильного ответа в пункте (b) - ещё 1,5 балла.

При использовании иных методов (напр., ТФКП) решение оценивается индивидуально.

Трек «Математические методы в социологии»

Вопрос 12

Вопрос 1 из 4

Критерии оценивания

Ориентиром является выделение трех основных сил – конкуренции, властных отношений и институционального принуждения. Близкий к этому ответ – 20-26 баллов.

Выделение меньшего числа сил и/или необоснованное выделение иных – 10-20 баллов (в зависимости от степени отклонения).

Адекватная интерпретация влияния независимых переменных – 5-10 баллов (в зависимости от ошибок или необоснованных суждений).

Вопрос 13

Вопрос 2 **из** 4

Критерии оценивания

1. Ориентировочные показатели: 1) текущие денежные доходы, 2) сбережения, 3) движимое имущество, 4) недвижимое имущество, 5) сельскохозяйственные животные, 6) земельные паи, пастбища, сенокосы. Возможен иной набор показателей. Главное – обоснованность.

2. Для ориентира взяты вопросы из книги «Средние классы в России» (2003). Соответствия с ними не требуется. Главное – обоснованность и адекватность формулировок.

3. Ориентировочный принцип: концентрация указанных показателей. От участника ожидается обоснование границ. Возможен и иной, обоснованный участником, способ.

Соответствие всем трем пунктам – 20–26 баллов. Двум пунктам – 10–20 баллов. Одному – 5–10 баллов. За ошибки и неточности баллы снимаются.

Вопрос 14

Вопрос 3 **из** 4

Критерии оценивания

1. Ориентировочные показатели: 1) высшее образование, 2) регулярная занятость, 3) нефизический характер труда, 4) наличие/отсутствие управленческих позиций. Возможен иной набор показателей. Главное – обоснованность.

2. Для ориентира взяты вопросы из книги «Средние классы в России» (2003). Соответствия с ними не требуется. Главное – обоснованность и адекватность формулировок.

3. Ориентировочный принцип: высшее образование + регулярная занятость – рабочие (физический труд) + руководители малых предприятий. Возможен и иной, обоснованный участником, способ.

Соответствие всем трем пунктам – 20–26 баллов. Двум пунктам – 10–20 баллов. Одному – 5–10 баллов. За ошибки и неточности баллы снимаются.

Вопрос 15

Вопрос 4 **из** 4

Критерии оценивания

1. Используется шкала Терстоуна. Суждениям присваиваются веса по медианам, а отбраковка – по квартильному размаху и заполненности континуума.

2. Ориентировочная гипотеза: землепашцы оценивают сделки по принципу рыночного обмена, а рыбаки – по принципу реципрокности.

Адекватный ответ на все 4 вопроса – 20–26 баллов. На три вопроса – 15–20 баллов. На два вопроса – 10–15 баллов. На один вопрос – 5–10 баллов. За ошибки и неточности баллы снимаются.

Вопрос **Инфо**

Трек «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»

Вопрос 16

Ответ: 2023

Решение: Функция f(n,α) реализует рекуррентное соотношение

$$b_n = 2\ 2022\ b_{n-1} - 2022^2\ b_{n-2}$$

с начальными условиями $b_0 = 1$ и $b_1 = 2022\ α$. Характеристическое уравнение данного рекуррентного соотношения,

$$q^2 - 2\ 2022\ q + 2022^2 = 0,$$

имеет двукратный корень q = 2022, следовательно, общее решение имеет вид

$$b_n = A\ 2022^n + B\ n\ 2022^n$$

где A и B — постоянные, определяемые из начальных условий при n = 0 и n = 1. Для α = 2 данные постоянные равны A=B=1, т.е., решение имеет вид

$$b_n^{(α=2)} = 2022^n\ (1 + n),$$

а для α = 1 имеем A = 1, B = 0, т.е., общее решение имеет вид

$$b_n^{(α=1)} = 2022^n.$$

Таким образом, отношение n-х членов последовательностей

$$b_n^{(α=2)} / b_n^{(α=1)} = 1 + n,$$

что при n = 2022 дает 2023.

Критерии оценивания

10 баллов: обоснованное решение, правильный ответ
9 баллов: незначительная арифметическая ошибка (решение верное, ответ неверный)
7 баллов: разумное решение с существенными лакунами в обосновании
4 балла: попытки угадать ответ в разумном направлении, решение существенно неполное, обоснование отсутствует, ответ неверный
1 балл: попытки начать задачу решать
0 баллов: решение отсутствует вовсе либо присутствует набор цифр и слов, к решению никак не приближающий

Вопрос 17

Решение: Данная задача представляет собой вычисление определителя трехдиагональной матрицы. Обозначим данный определитель порядка n символом D_n. Раскладывая определитель D_n по последнему столбцу (или строке) с последующим разложением алгебраического дополнения по последней строке (столбцу), получим следующее рекуррентное соотношение

$$D_n = (1 + 2022^2) \cdot D_{n-1} - 2022^2 \cdot D_{n-2} . \qquad (1)$$

Составим характеристическое уравнение для решения (1)

$$\lambda^2 - (1 + 2022^2)\lambda + 2022^2 = 0 . \qquad (2)$$

Решая квадратное уравнение (2) (относительно λ), будем иметь

$$\lambda_1 = 2022^2 , \quad \lambda_2 = 1 . \qquad (3)$$

Так как в силу (3) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение для D_n запишется в виде

$$D_n = C_1 \cdot (2022^2)^n + C_2 , \qquad (4)$$

где константы C_1 и C_2 могут быть найдены из начальных условий

$$C_1 = \frac{D_2 - \lambda_2 \cdot D_1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}; \quad C_2 = -\frac{D_2 - \lambda_1 \cdot D_1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} . \qquad (5)$$

Используя (5), получаем

$$C_1 = \frac{2022^2}{2022^2 - 1} , \quad C_2 = \frac{1}{2022^2 - 1} .$$

Откуда окончательно будем иметь

$$D_n = \frac{2022^2}{2022^2 - 1} \cdot (2022^2)^n + \frac{1}{2022^2 - 1} = \frac{2022^{2n+1} - 1}{2022^2 - 1} .$$

Критерии оценивания

10 баллов: полное обоснованное решение

Правильно получено рекуррентное соотношение – 5 баллов

Правильно составлено и решено характеристическое уравнение – 2 балла.

Верно записано общее решение и найдены коэффициенты в общем решении – 3 балла

Получена формула для определителя n–го порядка, но не доказана методом математической индукции – 4 балла

Вопрос 18

Решение

В силу условия задачи, подынтегральная функция имеет особенность только в точке $x = 0$. Следовательно, для решения задачи необходимо получить асимптотику функции $f(x)$ при $x \to 0$. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k\ge 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

и найдем несколько ненулевых членов, чтобы определить порядок нуля. По условию задачи имеем $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = a$.

Следовательно, $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + O(x^3),\ x \to 0$, но этого количества слагаемых недостаточно для исследования подынтегральной функции.

Найдем следующие слагаемые асимптотической формулы.

Производную третьего порядка в нуле выразим из уравнения:

$$f'''(0) = \frac{1}{2} f(0) f''(0) = 0.$$

Чтобы найти производную четвертого порядка, продифференцируем уравнение по x:

$$2f^{(4)}(x) - f'(x)f''(x) - f(x)f'''(x) = 0,$$

откуда получаем значение при $x = 0$:

$$f^{(4)}(0) = \frac{1}{2}\left(f'(0)f''(0) + f(0)f'''(0)\right) = 0.$$

Производная пятого порядка находится аналогично:

$$f^{(5)}(0) = \frac{1}{2}\left((f''(0))^2 + 2f'(0)f'''(0) + f(0)f^{(4)}(0)\right) = \frac{1}{2}a^2.$$

Следовательно, мы получили следующую асимптотику для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{2\cdot 5!}x^5 + O(x^6),\ x \to 0.$$

Тогда асимптотика подынтегральной функции имеет вид:

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} = \frac{a^2 \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 5!}x^2 + O(x^3)}{ax - a^2\frac{5}{2\cdot 5!}x^4 + O(x^5)} = \frac{a^2\frac{1}{4}x^2 + O(x^3)}{ax + O(x^4)} = \frac{a^2\frac{1}{4}x^2(1+O(x))}{ax(1+O(x^3))} = \frac{a}{4}x(1+O(x)), \quad x \to 0.$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{10} x\,dx$, который, очевидно, сходится: $\int_0^{10} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{10} = 50$.

Следовательно, по предельному признаку сравнения ($\lim\limits_{x\to+0} \frac{\frac{f'''(x)}{f'(x)}}{x} = \frac{a}{4}$, $a = \text{const} > 0$), исходный интеграл сходится.

Критерии оценивания

10 баллов: обоснованное решение, правильный ответ

6 баллов: получена корректная асимптотика для f(x) с двумя ненулевыми коэффициентами ряда Тейлора

3 балла: представлено разложение f(x) в ряд Тейлора с одним ненулевым коэффициентом

Вопрос 19

Решение.

Основные факты, которые нужны для решения задачи.

Пусть ξ и η - независимые с.в., распределенные по показательному закону с параметрами α и β соответственно. Тогда

(1). с.в. $\zeta = \min(\xi, \eta)$ распределена по показательному закону с параметром $\alpha + \beta$.

(2). с.в. $\sigma = \max(\xi, \eta)$ имеет функцию распределения

$$F_\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} + e^{-(\alpha+\beta)t}, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Это следует из очевидного равенства $F_\sigma(t) = F_\xi(t) F_\eta(t)$.

(3)

$$P\{\xi = \min(\xi, \eta)\} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad P\{\eta = \min(\xi, \eta)\} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

(4) Свойство отсутствия последействия для показательного распределения:

Зафиксируем $t > 0$. Обозначим $\xi_t = \xi - t$. Тогда для всех $x \geq 0$

$$P\{\xi_t \geq x | \xi \geq t\} = P\{\xi \geq x + t | \xi \geq t\} = e^{-\alpha x}$$

Другими словами, условное распределение случайной величины $\xi_t = \xi - t$ при условии $\xi \geq t$ является показательным с тем параметром α, что и у ξ.

Введем случайные величины ξ_A, ξ_B, ξ_C и τ_A, τ_B, τ_C. Здесь ξ_A, ξ_B, ξ_C - длительности выполнения задач A, B и C соответственно, а τ_A, τ_B, τ_C - моменты окончания выполнения задач A, B и C соответственно. Тогда из условия задачи ξ_A, ξ_B, ξ_C - независимые случайные величины, распределенные по показательному закону с параметрами $\alpha_A = 1/m_A$, $\alpha_B = 1/m_B$ и $\alpha_C = 1/m_C$ соответственно ($\alpha_A = 1/10$, $\alpha_B = 1/10$ и $\alpha_C = 1/12$). Заметим, что

$$\tau_A = \xi_A,\ \tau_B = \xi_B,\ \tau_C = \min(\xi_A, \xi_B) + \xi_C = \min(\tau_A, \tau_B) + \xi_C$$

Пункт 1.

Событие {выполнение задачи C начнется менее чем через 5 минут} эквивалентно событию { значение минимума из времен выполнения задачи A и задачи B менее 5 минут}. Таким образом, вероятность того, что выполнение задачи C начнется менее чем через 5 минут $= P\{\min(\xi_A, \xi_B) < 5\} = 1 - e^{-1}$, так как $\min(\xi_A, \xi_B)$ распределен по показательному закону с параметром $1/5$ (факт 1).

Пункт 2.

Следует из пункта 1. Так как задача C поступит на какой-то канал через случайное время, равное $\min(\xi_A, \xi_B)$, то выполнение задачи C в среднем начнется через 5 минут (так как $\min(\xi_A, \xi_B)$ распределен по показательному закону с параметром $1/5$, и среднее, т.е. математическое ожидание, равно 5).

Пункт 3.

Событие O= {задача C будет выполнена не последней } может произойти в результате наступления одного из двух событий:

1. первой будет выполнена задача A (а задача B все еще выполняется), задача C поступит на канал 1, задача C будет выполнена, а задача B все еще будет выполняться каналом 2.

2. первой будет выполнена задача B (а задача A все еще выполняется), задача C поступит на канал 2, задача C будет выполнена, а задача A все еще будет выполняться каналом 1.

Определим события O_A и O_B: событие O_A состоит в том, что первой будет выполнена задача A (а задача B все еще выполняется). Событие O_B аналогично: первой будет выполнена задача B (а задача A все еще выполняется). Тогда

$$P\{O\} = P\{O \cap O_A\} + P\{O \cap O_B\}$$
$$P\{O \cap O_A\} = P\{O/O_A\} P\{O_A\}$$
$$P\{O \cap O_B\} = P\{O/O_B\} P\{O_B\}$$

Отсюда

$$P\{O\} = P\{O/O_A\} P\{O_A\} + P\{O/O_B\} P\{O_B\}$$

Заметим, что

$$P\{O_A\} = P\{\xi_A = \min(\xi_A, \xi_B)\} = \frac{1}{2}$$
$$P\{O_B\} = P\{\xi_B = \min(\xi_A, \xi_B)\} = \frac{1}{2}$$

Вычислим $P\{O/O_A\}$. Заметим, что для этого нам надо вычислить вероятность того, что длительность выполнения задачи C меньше, чем $\hat{\xi}_B$ – остаточное время выполнения задачи B (время от момента τ_A до момента τ_B). Но по свойству отсутствия последействия $\hat{\xi}_B$ распределена по показательному закону с параметром $\alpha_B = 1/10$. После этого применяем факт 3

$$P\{O/O_A\} = P\left\{\xi_C < \hat{\xi}_B\right\} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

Аналогично для второго случая:

$$P\{O/O_B\} = P\left\{\xi_C < \hat{\xi}_A\right\} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

$$P\{O\} = \frac{5}{11}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{11}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{11}$$

Пункт 4.

Заметим, что в силу условий задачи и свойства отсутствия последействия для показательного распределения время выполнения задания есть сумма двух случайных величин: минимума из двух независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметрами $1/10$ и $1/10$, и максимума из двух независимых показательных случайных величин с параметрами $1/10$ и $1/12$. Следовательно, среднее время выполнения всего заказа равно сумме математических ожиданий указанных выше величин.

Математическое ожидание m минимума из двух независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметрами $1/10$ и $1/10$, равно 5 минутам (используем опять факт 1, см. решение п.1)

Математическое ожидание случайной величины с функцией распределения (1) равно

$$M = \int_0^\infty \bar{F}_\sigma(t)\,dt = \int_0^\infty \left(e^{-\alpha t} + e^{-\beta t} - e^{-(\alpha+\beta)t}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha+\beta}$$

где $\alpha = 1/10$ и $\beta = 1/12$, т.е.

$$M = 10 + 12 - \frac{120}{22} = 22 - \frac{60}{11} = \frac{182}{11}$$

Таким образом,задание будет выполнено (то есть, будут выполнены все три подзадачи) в среднем через $5 + \frac{182}{11} = \frac{237}{11} \approx 21,5$ минут.

Критерии оценивания

12 баллов: полное обоснованное решение с верными ответами по всем 4 пунктам

11 баллов: обоснованное решение с верными ответами по всем 4 пунктам с небольшими недочетами

10 баллов: 3 верных ответа с полными обоснованными решениями и наличие верных идей в 4 пункте

8–9 баллов: 3 верных ответа, решения с недочетами

6–7 баллов: 2 верных ответа с полными решениями и наличие верных идей, которые могли привести к решению 3–4 пунктов

5 баллов: 2 верных ответа с полными решениями

4 балла: 2 верных ответа, но решения недостаточно обоснованы

2–3 балла: есть 1–2 верных ответа, но нет решений или обоснований

1 балл: верных ответов и решений нет, но есть некоторые верные формулы, относящиеся к задаче

Вопрос 20

Решение

Один из вариантов алгоритма сложности O(n) в среднем описан ниже:

1. Нам понадобится дополнительный контейнер – словарь (ассоциативный массив), реализованный на основе хэш-таблицы. Сложность операций поиска и добавления элементов в таком словаре O(1) в среднем.

2. Проходим по массиву, выбирая лишь неотрицательные элементы и пишем в словарь, где ключ – значение элемента, значение по ключу – количество повторений. Это занимает линейную сложность.

2. Проходим по массиву, отбирая только отрицательные элементы. Проверяем наличие противоположных по знаку элементов в словаре. Если они есть, увеличиваем счётчик пар с нулевой суммой на количество элементов в словаре. Это аналогично занимает линейную сложность.

3. Добавляем к счётчику количество пар из нулевых элементов (число нулевых элементов записано в словаре). Это занимает константную сложность (O(1)).

Критерии оценивания
10 баллов: представлен корректный алгоритм сложности O(n) в среднем
5 баллов – представлен корректный алгоритм сложности O(n*log n) в среднем
1 балл – представлен корректный алгоритм сложности O(n*n) в среднем