

Направление «Математика»**Инвариантная часть****Задача № 1**

Решение. Нам дана дробь $f(x) = \frac{x^6 - 4x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 8}{x^4 - 5x^2 + 4}$. Сначала поделим с остатком:

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{-2x^3 - 7x^2 + 2x + 4}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Обозначим последнюю дробь через $g(x)$. Тогда $f^{(2022)}(x) = (x^2 + 1)^{(2022)} + g^{(2022)}(x)$. Теперь мы разложим $g(x)$ на простые дроби:

$$g(x) = \frac{-2x^3 - 7x^2 + 2x + 4}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2},$$

где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Домножая на соответствующий знаменатель и подставляя $x = 1, -1, 2, -2$, получаем, что

$$A = g(x)(x-1)|_{x=1}, B = g(x)(x+1)|_{x=-1}, C = g(x)(x-2)|_{x=2}, D = g(x)(x+2)|_{x=-2}.$$

После вычислений, мы видим, что $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -3$, $D = 1$.
Итого:

$$g(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - 3\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}.$$

Вспомним, что $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$ и получим, что

$$f^{(2022)}(x) = 2022! \left(\frac{1}{2(x-1)^{2023}} - \frac{1}{2(x+1)^{2023}} - 3\frac{1}{(x-2)^{2023}} + \frac{1}{(x+2)^{2023}} \right).$$

Критерии оценивания

[6 баллов] Верное дифференцирование простых дробей.

[14 баллов] Получено разложение на простые дроби, после деления с остатком.

[-2 или -3 балла] Незначительные арифметические ошибки.

[- 7 баллов] Получено разложение на простые дроби, в котором имеется арифметическая ошибка.

Задача № 2

Критерии оценивания и решения заданий заключительного этапа

Решение. Пусть t_1 и t_2 – время отправления поездов из пунктов А и Б соответственно, отсчитываемое в часах от 12.00 (то есть $t_1, t_2 \in [0; 1]$). Тогда t_1 и t_2 – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0; 1]$.

Обозначим через S расстояние от места встречи поездов до пункта А. Найдём зависимость S от t_1 и t_2 . Возможны два варианта.

1. При $t_1 - t_2 \geq \frac{1}{2}$ поезд из пункта А не успевает выехать, так как поезд из пункта Б проезжает за полчаса 50 км. Поэтому $S = 0$.
2. При $t_1 - t_2 < \frac{1}{2}$ поезда встречаются в некоторой точке отрезка $[A; B]$ отличной от А. Обозначим через t время встречи, отсчитываемое в часах от 12.00. Его можно найти из выражения $50(t - t_1) + 100(t - t_2) = 50$. Тогда $S = 50(t - t_1) = \frac{50}{3} + \frac{100}{3}(t_2 - t_1)$.

Таким образом,

$$S = \begin{cases} \frac{50}{3} + \frac{100}{3}(t_2 - t_1), & -\frac{1}{2} < t_2 - t_1 \leq 1; \\ 0, & -1 \leq t_2 - t_1 \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вычислим плотность распределения случайной величины $t_2 - t_1$.

$$p_{t_2 - t_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t_2}(y)p_{t_1}(x+y)dy = |[0; 1] \cap [-x; 1-x]| = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$S = \begin{cases} \frac{50}{3} + \frac{100}{3}(t_2 - t_1), & -\frac{1}{2} < t_2 - t_1 \leq 1; \\ 0, & -1 \leq t_2 - t_1 \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вычислим плотность распределения случайной величины $t_2 - t_1$.

$$p_{t_2 - t_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t_2}(y)p_{t_1}(x+y)dy = |[0; 1] \cap [-x; 1-x]| = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$E(S) = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{50}{3} + \frac{100}{3} \cdot \tau \right) (1 - |\tau|) d\tau = \frac{50}{3} \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 + 2\tau)(1 + \tau) d\tau + \frac{50}{3} \int_0^1 (1 + 2\tau)(1 - \tau) d\tau.$$

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 + 2\tau)(1 + \tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 + 3\tau + 2\tau^2) d\tau = \left(\tau + \frac{3\tau^2}{2} + \frac{2\tau^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}.$$

$$I_2 = \int_0^1 (1 + 2\tau)(1 - \tau) d\tau = \int_0^1 (1 + \tau - 2\tau^2) d\tau = \left(\tau + \frac{\tau^2}{2} - \frac{2\tau^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Отсюда

$$E(S) = \frac{50}{3} \left(\frac{5}{24} + \frac{5}{6} \right) = \frac{50}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{625}{36}.$$

Критерии оценивания

[10 баллов] Получение и обоснование двойного интеграла, вычисляющего математическое ожидание расстояния от места встречи поездов до пункта А.

[5 баллов] Нахождение и обоснование формулы для расстояния от места встречи поездов до пункта А.

[5 баллов] Нахождение и обоснование плотности распределения для расстояния от места встречи поездов до пункта А как функции одной переменной $\tau = t_1 - t_2$, где t_1 и t_2 – время отправления поездов из пунктов А и Б соответственно (*).

[5 баллов] Получение и обоснование обыкновенного интеграла, вычисляющего математическое ожидание расстояния от места встречи поездов до пункта А (способ, использующий плотность распределения (*)).

[5 баллов] Вычисление интеграла (интегралов) для получения числового значения искомого математического ожидания.

[1 балл] Рассмотрение случая, когда оба поезда успевают выехать, и нахождение формулы для расстояния от места встречи до пункта А в этом случае.

[0 баллов] Получение обыкновенного интеграла, предположительно вычисляющего математическое ожидание расстояния от места встречи поездов до пункта А, в случае неверно найденной плотности распределения.

[0 баллов] Нахождение математического ожидания неверно найденной случайной величины.

[-1 балл] Отсутствие обоснования формулы для расстояния от места встречи поездов до пункта А в одном из следующих случаев: 1) оба поезда успевают выехать, но из пункта А поезд выезжает позже, чем из пункта Б 2) поезд из пункта Б выезжает позже поезда из пункта А.

Критерии оценивания и решения заданий заключительного этапа

[–1 или –2 балла] Арифметическая ошибка при вычислениях.

[–5 баллов] Взятие лишних весовых множителей при написании двойного интеграла, вычисляющего математическое ожидание расстояния от места встречи поездов до пункта А.

[–5 баллов] Отсутствие вычислений даже при условии правильного ответа.

[–5 баллов] Ошибки при взятии интегралов.

Задача № 3

Решение. Сделаем замену $y = \frac{1}{x}$:

$$I = \int_0^\infty \left(1 - x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2} - \frac{\sin(y)}{y^3} \right) dy$$

Проинтегрируем по частям взяв в качестве $u = y - \sin(y)$, а в качестве $dv = \frac{1}{y^3}$:

$$I = \frac{\sin(y) - y}{2y^2} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1 - \cos(y)}{2y^2} dy$$

Второе слагаемое снова интегрируем по частям, получая в итоге

$$\frac{\sin(y) - y}{2y^2} \Big|_0^\infty + \frac{\cos(y) - 1}{2y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin(y)}{2y} dy$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin(y)}{2y} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Теперь

$$\frac{\sin(y) - y}{2y^2} = \frac{1}{2y} \left(\frac{\sin(y)}{y} - 1 \right)$$

При стремлении y к бесконечности очевидно получаем в пределе 0, при стремлении к нулю – тоже, например, по правилу Лопиталя. Аналогично, $\frac{\cos(y)-1}{2y} \Big|_0^\infty = 0$. Отсюда $I = \frac{\pi}{4}$.

Критерии оценивания

Если не используется комплексный интеграл:

[15 баллов] Верное решение с арифметической ошибкой.

[10 баллов] Задача сведена к подсчёту интеграла функции $\frac{\sin(x)}{x}$, но не приведено ни итогового ответа, ни его вычисления.

[10 баллов] Задача сведена к подсчёту интеграла функции $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$.

[2 балла] Неверный ответ, пропущены шаги в решении.

При использовании комплексного интеграла:

[6 баллов] Интегрирование по верному контуру, с правильным подсчётом одного из интегралов по полуокружностям.

[3 балла] Интегрирование по верному контуру, но без подсчёта интегралов по полуокружностям.

[0 баллов] Интегрирование по неверному контуру.

Задача № 4

Решение. Пусть на плоскости нарисовано N непересекающихся, по возможно касающихся окружностей. Рассмотрим два случая:

1. окружности касаются только внешним образом (то есть любые две касающиеся окружности лежат по разные стороны от общей касательной, проведённой в точке касания);

Критерии оценивания и решения заданий заключительного этапа

2. есть окружности, которые касаются внутренним образом (то есть лежат по одну сторону от общей касательной, проведённой в точке касания).

В первом случае каждой такой совокупности из N окружностей сопоставим граф Γ на N вершинах следующим образом. Вершины – центры окружностей, рёбра – касания соответствующих окружностей. Тогда легко видеть, что Γ – планарный граф. Оценим количество рёбер графа. Для связного планарного графа справедлива формула Эйлера: $V - E + F = 2$, где V – количество вершин, E – количество рёбер, F – количество двумерных граней, включая внешнюю. Каждое ребро такого графа содержится ровно в двух двумерных гранях, поэтому в случае, когда все двумерные грани – треугольники, мы получим равенство $3F = 2E$, а в общем случае неравенство $3F \leq 2E$. Тогда $3(2 - V + E) \leq 2E$, то есть $E \leq 3V - 6$. В нашем случае $V = N$, поэтому оценка приобретает вид: $E \leq 3N - 6$. Очевидным образом полученная оценка верна также в случае несвязного графа Γ .

Во втором случае оценку можно доказать по индукции. Рассмотрим функцию натурального аргумента $T(N)$ = наибольшее число точек касания N непересекающихся окружностей на плоскости. Напомним, что среди N касаний теперь есть по крайней мере одно внутреннее.

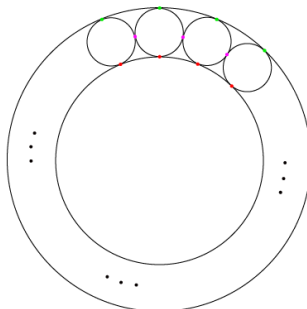
Утверждение. Если $N \geq 3$, то $T(N) \leq 3N - 6$.

Доказательство. База индукции: при $N = 3$, $T(3) = 3 = 3 \cdot 3 - 6$.

Шаг индукции: Найдём такую окружность ω , что у неё есть хотя бы одно внутреннее касание, но все окружности, которые располагаются внутри ω , если и касаются друг друга, то только внешним образом. Пусть внутри ω находится k окружностей, тогда снаружи находится $(N - k - 1)$.

- Если $k \geq 2$ и $N - k - 1 \geq 2$, тогда $T(N) \leq T(k + 1) + T(N - k) \leq 3(k + 1) - 6 + 3(N - k) - 6 = 3N - 9$.
- Если $k = 1$ и $N - 2 \geq 2$ (ω внутренним образом касается с единственной окружностью, а остальные $N - 2$ располагаются снаружи), то $T(N) \leq T(N - 1) + 1 \leq 3(N - 1) - 6 + 1 = 3N - 8$.
- Если $k = 1$ и $N - 2 = 1$, то $T(3) = 2 \leq 3 \cdot 3 - 6 = 3$.
- Если $k = N - 2 \geq 2$ (снаружи ω располагается ровно 1 окружность, а внутри не меньше двух), то $T(N) \leq T(N - 1) + 1 \leq 3N - 8$.
- Если $k = N - 1$ (все окружности находятся внутри ω), то, в силу выбора ω , внутри неё располагается совокупность $(N - 1)$ непересекающихся окружностей, которые могут касаться только внешним образом. Для этой совокупности окружностей, согласно случаю (1), мы можем построить обыкновенный плоский граф Γ на $(N - 1)$ вершине. Дополним граф Γ вершиной v_ω , соответствующей окружности ω , и n рёбрами, соответствующими касаниям ω с окружностями $\mu_1, \dots, \mu_n$, следующим образом. Вершину v_ω возьмём вне плоскости графа Γ , рёбра начнём радиусами окружностей $\mu_1, \dots, \mu_n$, проведёнными в точки касания, и продолжим отрезками, соединяющими точки касания с вершиной v_ω . Полученный граф Γ' является планарным. Значит в этом случае также справедлива оценка и $T(N) \leq 3N - 6$.

Таким образом, в случае, когда на плоскости нарисовано 2022 окружности, максимально возможное число точек касания равно $3 \cdot 2022 - 6 = 6060$. В качестве примера можно рассмотреть две концентрические окружности, между которыми «кольцом» вписаны 2020 окружностей, см. рисунок ниже.



Критерии оценивания

[10 баллов] доказательство, что число касаний N непересекающихся окружностей на плоскости не превосходит $3N - 6$, для случая, когда есть внутренние касания.

[7 баллов] доказательство, что число касаний N непересекающихся окружностей на

плоскости не превосходит $3N - 6$, для случая когда есть только внешние касания (то есть

когда можно перейти к планарному графу). **[5 баллов]** доказательство, что число касаний N непересекающихся окружностей на плоскости не превосходит $3N - 6$, для случая, когда есть внутренние касания и есть окружность ω такая, что все остальные находятся внутри неё (*).

[3 балла] доказательство, что число касаний N непересекающихся окружностей на плоскости не превосходит $3N - 6$, с использованием идеи (**) для случая когда вся совокупность окружностей разбивается на две конфигурации необходимого вида.

Критерии оценивания и решения заданий заключительного этапа

[3 балла] пример из 2022 непересекающихся окружностей на плоскости с максимально возможным числом (6060) точек касания.

[2 балла] идея разбить совокупность непересекающихся окружностей на конфигурации, отвечающие требованию: "не более одной окружности, которую касаются внутри, притом, что эта окружность самая внешняя"(**).

[1 балл] идея про сведение задачи к рассмотрению соответствующего графа.

[1 балл] формулировка оценки сверху на число касаний N непересекающихся окружностей, которая достигается.

[1 балл] идея применить инверсию относительно окружности ω в случае (*).

[1 балл] сведение случая, когда есть окружность ν такая, что все остальные находятся внутри неё, но касаются между собой только внешним образом, к планарному графу.

[-1 балл] нет объяснения как построен пример.

[-1 балл] в примере не вычислено число точек касания.

[-2 балла] отсутствие обоснования неравенства $3F \leq 2E$, где F – число граней, E – число рёбер планарного графа.

Трек «Математика»

Задача № 5

Решение. Из условия следует, что все собственные значения у искомой матрицы – единицы, так как любое собственное это корень уравнения $\lambda^2 = 1$, у которого в поле из четырёх элементов ровно одно значение решения. Следовательно, любая матрица, квадрат которой равен единице, имеет Жорданову форму над $\mathbb{F}_4$. Возможные Жордановы формы:

$$\begin{aligned} 1) J_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2) J_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3) E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Вариант 2) не подходит, так как $J_2^2 \neq 1$. Вариант 3) не подходит, так как по условию матрица неединичная. Таким образом, матрица либо единичная, либо подобна матрице J_1 , то есть имеет вид CJ_1C^{-1} для некоторой матрицы $C \in GL_3(\mathbb{F}_4)$. Легко видеть, что количество матриц с Жордановой формой J_1 равно $|GL_3(\mathbb{F}_4)|/k$, где k – количество элементов в централизаторе матрицы J_1 , то есть таких C , что $CJ_1 = J_1C$. Действительно, на множестве матриц вида CJ_1C^{-1} транзитивно действует группа $GL_3(\mathbb{F}_4)$ сопряжениями и мощность орбиты, то есть количество матриц с данной жордановой формой равно индексу стабилизатора, то есть числу $|GL_3(\mathbb{F}_4)|/k$.

Количество элементов в $GL_3(\mathbb{F}_4)$ равно $(4^3-1)(4^3-4)(4^3-4^2)$. Посчитаем количество элементов в централизаторе матрицы J_1 : если $CAC^{-1} = A$, то есть $CA = AC$ и

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Таким образом

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,1} + c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,1} + c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,1} + c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} + c_{2,1} & c_{1,2} + c_{2,2} & c_{1,3} + c_{2,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}.$$

$$c_{2,1} = c_{2,3} = c_{3,1} = 0$$

$$c_{1,1} = c_{2,2}$$

Таким образом, матрицы из централизатора имеют вид

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ 0 & c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}$$

Заметим, что определитель такой матрицы равен $c_{1,1} \cdot c_{2,2} \cdot c_{3,3}$. Таким образом элементы на диагонали – ненулевые, а вне диагонали – произвольные. Отсюда $k = 4^3 \cdot 3^2$, и количество матриц с жордановой формой J_1 равно $\frac{63 \cdot (16-1) \cdot (4-1)}{3^2} = 21 \cdot 15 = 315$.

Критерии оценивания

[15 баллов] Нахождение всех Жордановых нормальных форм для искомого оператора.

[5 баллов] Присутствует идея об использовании Жордановой нормальной формы.

[1 балл] Таблица умножения в поле $\mathbb{F}_4$.

[1 балл] Верное вычисление характеристического многочлена искомой матрицы.

Решение задачи № 6

Решение. Легко видеть, что $f(0) = 0$, так как иначе окружности малого радиуса не переходят в окружности с Обозначим через k порядок нуля в точке 0. Более того, других корней у f нет. Тогда функция

$$g(z) = \frac{f}{z^k}$$

аналитическая функция, у которой нулей нет. Более того, функция $g(z)$ отображает окружности с центром в нуле в некоторые части окружностей с центром в нуле. Обозначим через $h(r)$ радиус окружности, подмножеством которой является образ окружности с центром в нуле и радиуса r . По принципу максимума максимум модуля достигается на границе, откуда следует, что функция $h(r)$ монотонна. Так как $g(0) \neq 0$ отсюда следует, что функция $\frac{1}{g}$ – ограничена и аналитична и, следовательно, константа. Таким образом $f(z) = C \cdot z^k, C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Критерии оценивания

[1 балл] Доказано, что $f(0) = 0$.

[1 балл] Рассмотрена функция f/z^k , где k – порядок нуля f .

[2 балла] Верный ответ.

Трек «Математическая физика»

Задача № 7

Решение. а) Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол ϕ между вертикальной прямой и отрезком, соединяющим центры подвижной и неподвижной труб. Нулевое значение обобщенной координаты выберем в положении равновесия, когда точка касания совпадает с нижней точкой неподвижной трубы. В силу отсутствия проскальзывания, поворот центра подвижной трубы на угол ϕ сопровождается поворотом самой этой трубы на угол $\theta = \phi R/r$ относительно прямой направленной из центра неподвижной трубы в (переменную) точку касания.

Кинетическую энергию подвижной трубы представим в виде энергии движения центра масс и энергии вращения трубы в системе центра масс. Но так как в этой сумме энергия вращения должна вычисляться в *поступательно* движущейся системе отсчета, связанной с центром масс, то угловая скорость вращения определяется не углом θ , а разностью

$$\psi = \theta - \phi = \phi(R - r)/r.$$

Таким образом, кинетическая энергия трубы:

$$T = T_{ц.м.} + T_{отн.} = \frac{m(R - r)^2 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{mr^2 \dot{\psi}^2}{2} = m(R - r)^2 \dot{\phi}^2.$$

Потенциальная энергия с точностью до несущественной константы, фиксирующей нулевую точку энергии, дается выражением:

$$U(\phi) = -mg(R - r) \cos \phi.$$

Итак, Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = T - U = m(R - r)^2 \dot{\phi}^2 + mg(R - r) \cos \phi.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа (уравнение движения системы):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow 2(R - r) \ddot{\phi} + g \sin \phi = 0.$$

б) Если подвижная труба совершает малые колебания в районе точки равновесия $\phi = 0$, то в уравнении движения можно разложить функцию $\sin \phi$ до первого порядка по угловой переменной и получить приближенное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{2(R - r)} \phi = 0,$$

что дает для угловой частоты колебаний ω следующий ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R - r)}}.$$

Критерии оценивания

Пункт А):

[15 баллов] Верное выражение для Лагранжиана.

[5 баллов] верные уравнения движения.

[–10 баллов] Ошибка в кинетической энергии (неправильный учет относительного вращения и т.п.).

Критерии оценивания и решения заданий заключительного этапа
[–5 баллов] Ошибка в потенциальном слагаемом Лагранжиана.

Пункт Б):

[10 баллов] Верное выражение для частоты малых колебаний.

[≤ 8 баллов] Если в пункте а) допущена ошибка в выражении для Лагранжиана, но для этого ошибочного Лагранжиана верно найдена частота колебаний.

Задача № 8

Решение. При ускоренном движении по круговой орбите заряженная частица будет излучать электромагнитные волны. Учитывая сделанные в условии допущения о малости потерь энергии за период и малости скорости заряда по сравнению со скоростью света, оценим потери энергии в дипольном приближении для мгновенной мощности излучения:

$$W(t) = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2,$$

где $\vec{d}$ – дипольный момент системы. Пренебрегая изменением радиуса орбиты и скорости заряда за период, получим в этом приближении, что дипольный момент представляется равномерно вращающимся вектором постоянной длины:

$$\vec{d}(t) = q \vec{r}_q(t) = q(R \cos \omega t, R \sin \omega t),$$

где мы используем декартовы координаты в плоскости движения заряда q , начало системы отсчета помещено в точку расположения неподвижного заряда $-Q$.

Угловую скорость вращения ω найдем из классического уравнения Ньютона для движения по окружности под действием Кулоновской силы:

$$mR\omega^2 = |\vec{F}_{\text{кул.}}| = \frac{qQ}{R^2}, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{qQ}{mR}}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для W получаем следующее:

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^4 Q^2}{m^2 R^4 c^3} = \text{const.}$$

В силу постоянства мощности излучения, энергия, излученная за период, равна:

$$\Delta E_{\text{изл.}} = W \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{qQ}{mc^2 R} \right)^{3/2} \frac{q^2}{R}.$$

Полная энергия системы двух зарядов:

$$E = \frac{m\omega^2 R^2}{2} - \frac{qQ}{R} = -\frac{qQ}{2R}.$$

Отсюда получаем связь потери энергии и изменения радиуса орбиты:

$$\Delta E = E(R - \Delta R) - E(R) \simeq -\frac{qQ}{2R^2} \Delta R \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta E}{E}.$$

И, наконец, учитывая связь потери энергии в системе и излученной энергии $\Delta E = -\Delta E_{\text{изл.}}$, получаем ответ на вопрос задачи:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{qQ}{mc^2 R}} \frac{q^2}{mc^2 R}.$$

Критерии оценивания

[15 баллов] Верное выражение для мощности дипольного излучения.

[10 баллов] Верная связь относительного уменьшения радиуса орбиты и изменения энергии.

[5 баллов] Верное выражение для частоты вращения.