Всероссийский конкурс исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж»

Исследовательская работа

Некоторые факты о ломаной Коха

Исследовательская работа

Направление *«Математика»*

2022 г.

1. Введение

В рамках школьной геометрии обычно рассматриваются относительно простые, конечные фигуры. Однако математика намного шире этого. Так, одним из типов объектов, которые не проходят в школе, являются фракталы (рис.1). Если коротко, то фрактал — это фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть некая её часть идентична целой фигуре во всём, кроме масштаба. Одним из таких фракталов является кривая Коха (рис 1), описание которой было опубликовано в 1906 году шведским математиком Хельге фон Кохом [1] . У кривой Коха открыто много свойств и закономерностей, и она упоминается в огромном количестве литературы [2], что нельзя сказать про другой математический объект, очень схожий с ней, а именно ломаную Коха (рис. 2), которая отличается от кривой Коха тем, что каждый её отрезок имеет единичную длину, и из-за этого с ней намного удобнее работать, используя координатную плоскость. Более подробно их различия описаны в следующем разделе. Изучению этой кривой посвящена эта работа. Стоит отметить, что некоторые данные об этом объекте были описаны в онлайн-энциклопедии OEIS [2], [3]. Изначальной **целью** работы было создание способа нахождения координат любой вершины ломаной, зная её номер, а также доказательство формулы $y(2n) = x(n) - 2y(n)$[1]. Более сложная версия этой формулы была замечена, но не доказана А.Д. Заболотским, но в процессе обсуждения была мной упрощена. Для выполнения работы были поставлены следующие **задачи:**

1. Придумать алгебраическое описание кривой.
2. Создать алгоритм нахождения координат вершины.
3. Написать программу, выполняющую этот алгоритм
4. Если получиться, составить и оформить строгое доказательство формулы $y(2n) = x(n) - 2y(n)$.

Основным **методом** изучения ломаной было нахождение закономерностей на отдельных частях ломаной, и последующая проверка их работы на весь объект. Был задействован метод математической индукции.

[1] Обозначения поясняются во втором разделе.

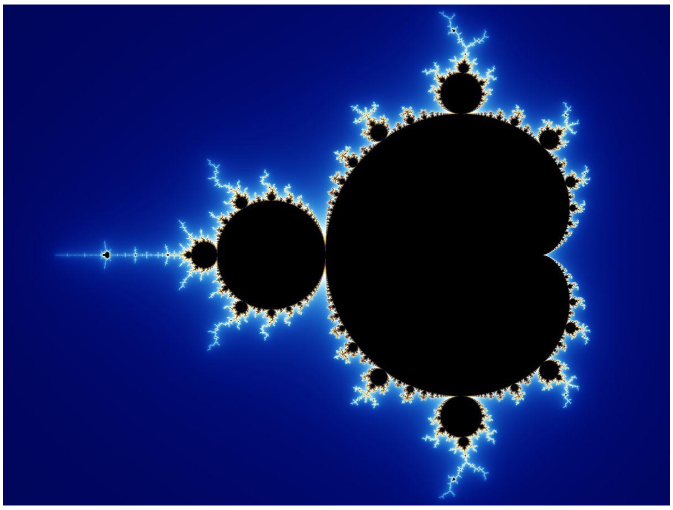

Рис.1. Один из самых знаменитых фракталов — Множество Мандельброта

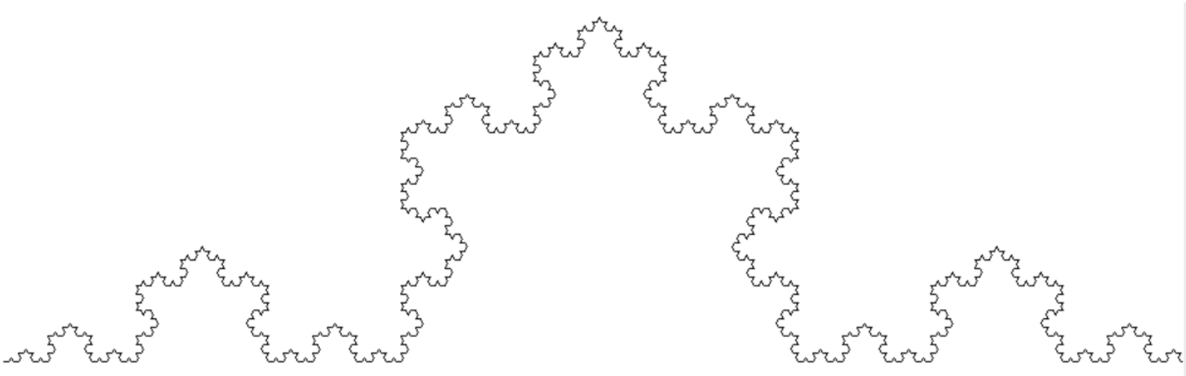

Рис.2. Это лишь часть кривой Коха, на самом деле её можно рисовать бесконечно.

2. Понятийный аппарат

Алгоритм построения ломаной. Генератор и порядок генератора.

Итак, разберёмся с тем, как построить ломаную Коха. На первом шаге мы начинаем с единичного отрезка (рис.3). На втором шаге к нему мы пририсовываем ещё три таких же отрезка, повёрнутых на $\pi/3$, $-\pi/3$ и 0 соответственно, как показано на рис.4 . На третьем шаге мы берём результат второго, и проводим с ним аналогичные преобразования — поворот на $\pi/3$, $-\pi/3$ и 0. В итоге мы получим то, что изображено на рис.5. И такой процесс можно продолжать до бесконечности, поворачивая и пририсовывая результат предыдущего шага в данной последовательности.

Введём некоторые термины. Будем называть результат каждого шага **генератором**, а то, какой по счёту шаг привёл нас к нему — **порядком генератора**, вот только отсчёт будем начинать с нуля. Для обозначения порядка генератора используем букву k.

Поскольку на каждом следующем шаге количество рёбер[2] увеличивается в четыре раза, а в самом начале мы имеем одно ребро, то длинна генератора порядка k всегда будет равна 4^k.

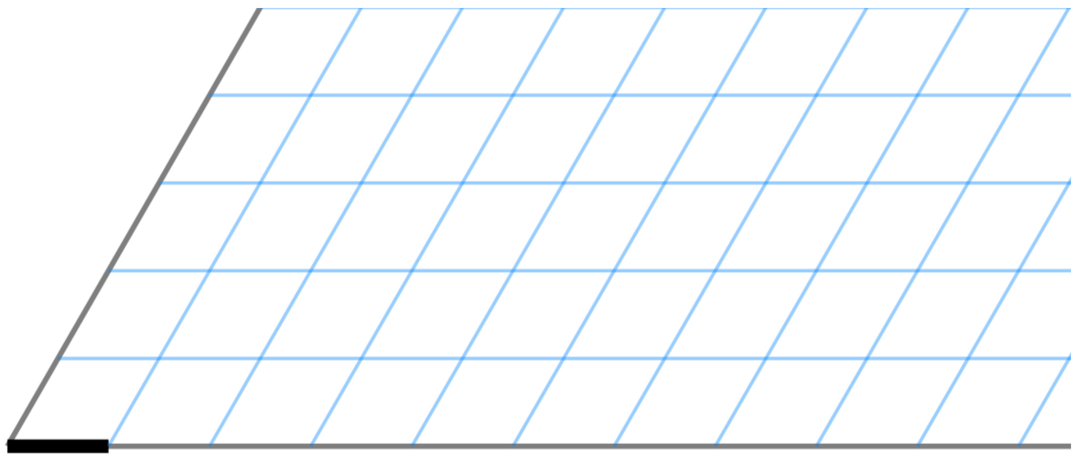

Рис.3. Нулевой шаг построения ломаной, генератор нулевого порядка.

[2] В данной работе понятия отрезок и ребро идентичны.

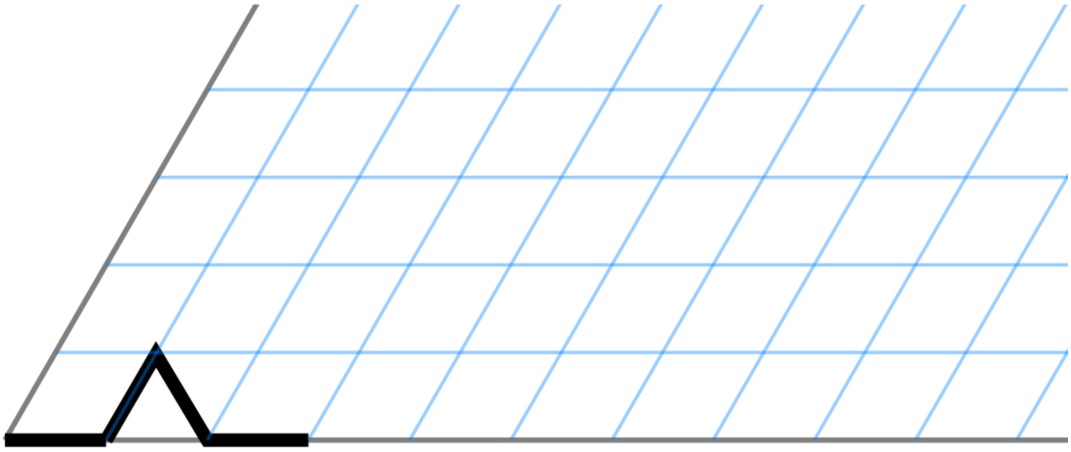

Рис.4. Первый шаг построения ломаной, генератор первого порядка.

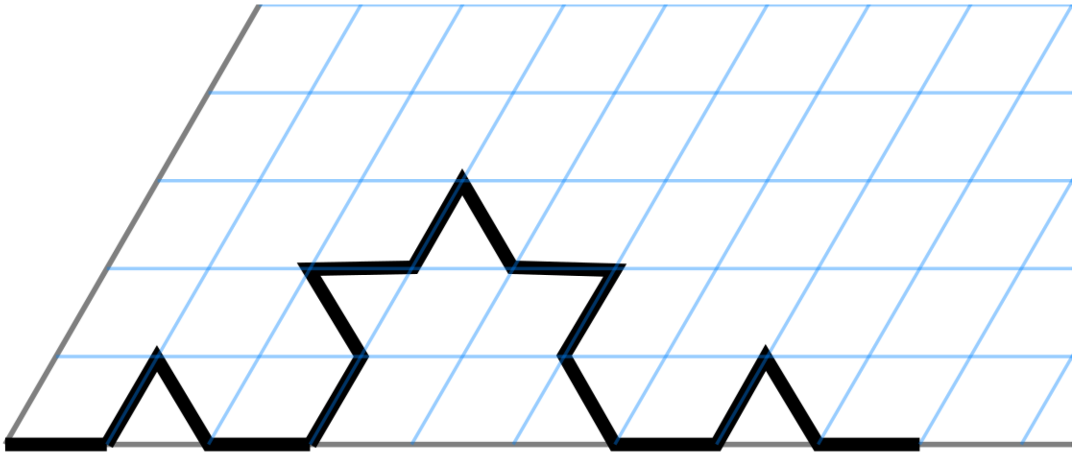

Рис.5. Второй шаг построения ломаной.

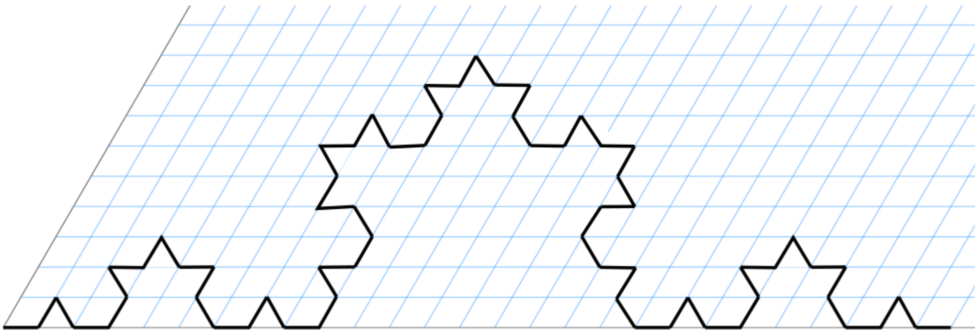

Рис.6. Третий шаг построения ломаной.

Здесь стоит пояснить отличие ломаной Коха от кривой Коха.

При построении кривой у нас в начале есть некий отрезок, с которым мы работаем, как бы изгибая его, как показано на рис.7. А когда мы рисуем ломаную Коха, мы присоединяем к результату прошлого шага новые отрезки. Фактически для построения ломаной Коха нужно взять некоторый шаг построения кривой Коха и сказать, что длина всех рёбер будет равна единице. Тогда мы получим генератор того порядка, какой и был шаг.

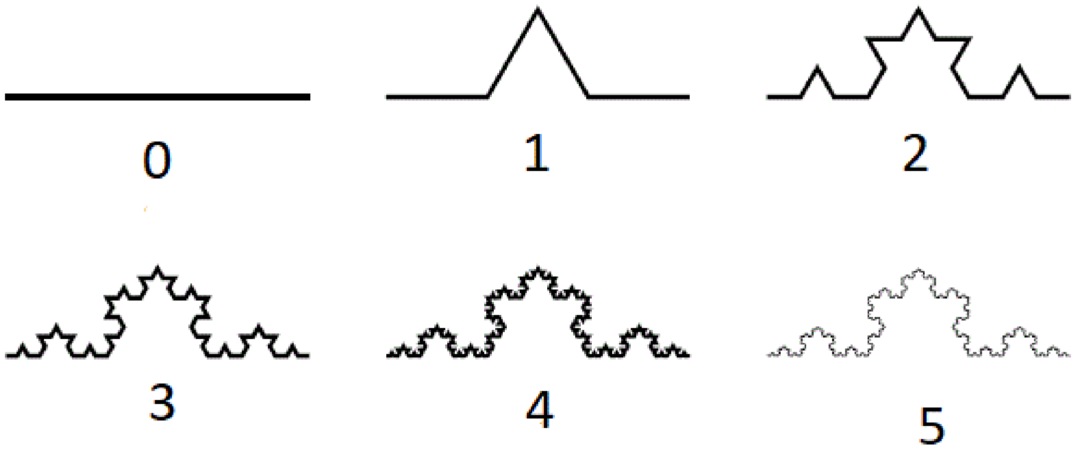

Рис.7

Базовые понятия для работы с вершинами.

Кроме нумерации порядков, мы будем отсчитывать вершины, обозначая их **номер** буквой n. У первой вершины n = 0. На рисунке 8 рядом с вершинами подписаны из номера.

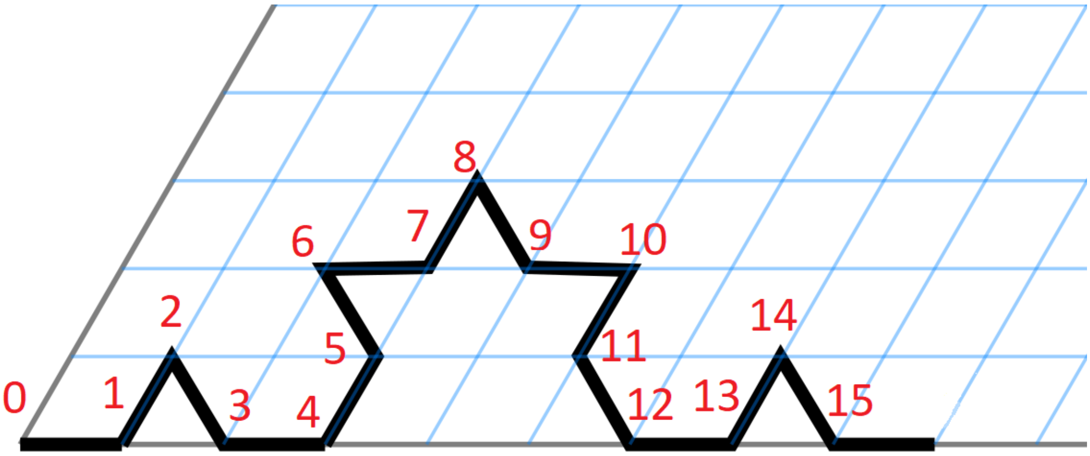

Рис.8

Введём систему координат, чтобы мы могли обозначать местонахождение вершин. Пусть первый отрезок ломаной будет принадлежать оси x , а ось y будет наклонена на угол $\pi/3$ относительно него (рис.9).

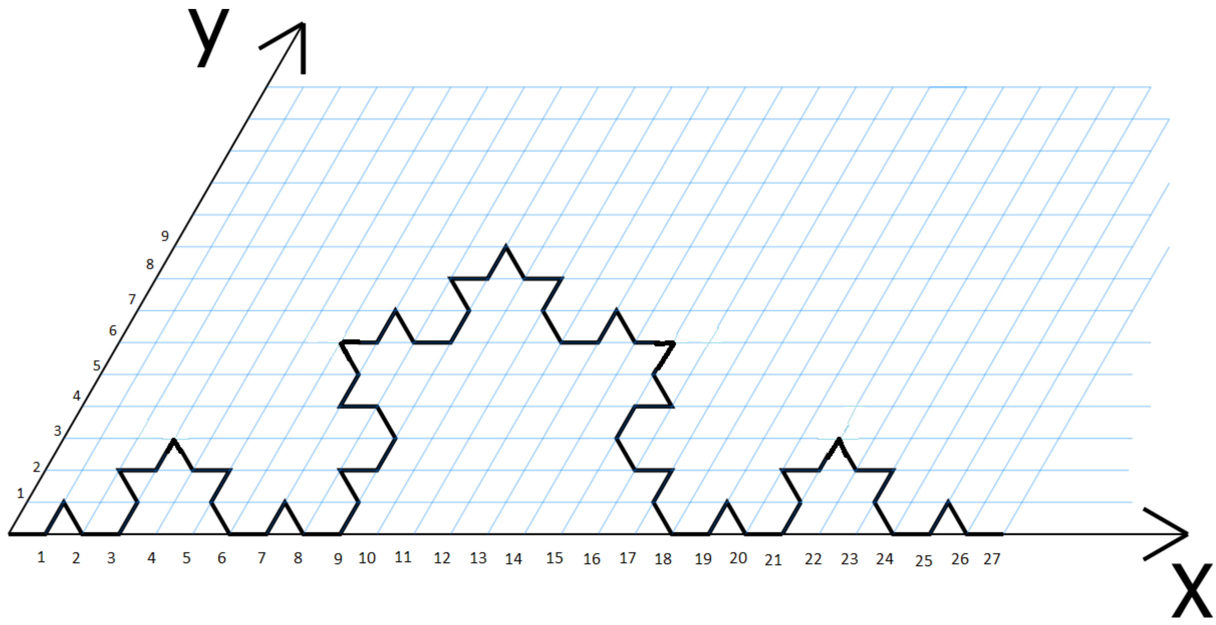

Рис.9

Если мы ввели систему, то можно говорить о координатах вершин. Обозначим их x(n) и y(n). Стоит отметить, что, так как система косоугольная (другое название — аффинная) , для нахождения x(n) из вершины нужно опускать не перпендикуляр, а прямую, параллельную оси y. Теперь поговорим о связи вершин с порядками генератора. Будем считать, что генератору порядка k принадлежат все вершины от $n = 0$ до $n = 4^k - 1$ включительно. Отсюда можно сделать вывод, что вершина n будет принадлежать всем генераторам, для которых $n < 4^k$. Как легко понять, таких существует бесконечное множество. Поэтому будем называть **минимальным порядком вершины n** порядок наименьшего генератора из этого множества (то есть того, k которого минимален). Найти его очень просто — он будет минимальной степени, в которую надо возвести 4, чтобы получившееся число было строго больше n.

Образы и прообразы

Как мы поняли из алгоритма построения ломаной, каждый генератор как бы собран из копий прошлых, а из копий одного генератора собираются следующие. Будем называть такие копии **образами** и **прообразами**. Конкретнее, будем говорить, что для некого генератора порядка k образами являются все его последующие копии, лежащие на ломаной. Отсчёт здесь будем вести так же с нуля. А прообразом некоего генератора будут другие, для которых изначальный может быть образом. Данная терминология (образ, прообраз) обычно используются в математике для обозначения результата некоего преобразования над объектом, в данном случае поворот и перенос.

Например, объект на рис.10 можно представить несколькими способами. Во-первых — это просто генератор третьего порядка. С другой стороны, это же и генератор второго порядка, и его три образа. А также генератор первого и его пятнадцать образов.

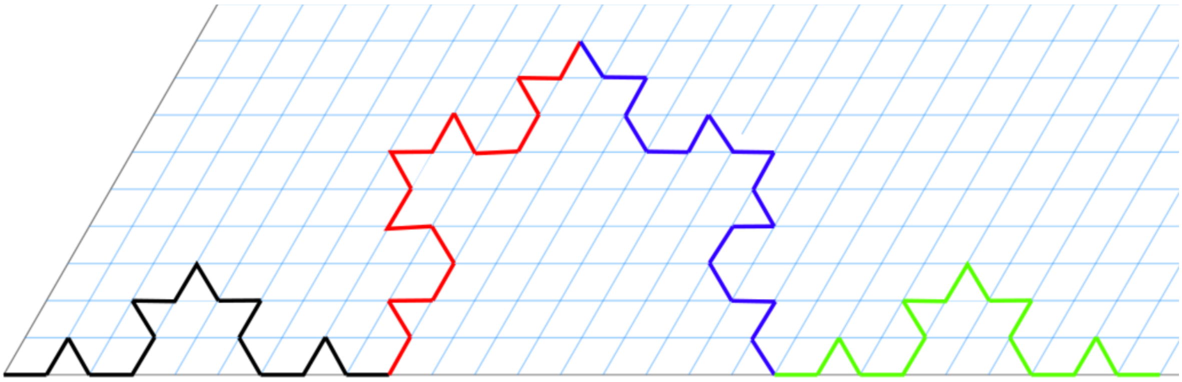

Рис.10. Чёрным цветом выделен генератор второго порядка, красным — его первый образ, синим — второй образ, зелёным — третий.

Каждый генератор состоит из вершин, а значит, можно говорить об образах и прообразах вершин. Пусть произвольная вершина n принадлежит генератору k. У этого генератора есть свои образы, и на каждом из них есть копия вершины n, будем называть её образом вершины n порядка k. Аналогично, прообразами вершины будем считать её копии на прообразах генератора. Далее в тексте мы иногда будем обозначать нахождения образа или прообраза некой вершины словом «переход». И сейчас очень важный момент — поскольку одна вершина принадлежит бесконечному количеству генераторов, то и образы у неё могут быть бесконечного количества порядков. Поэтому будем считать, что под выражением «образ вершины n» имеется в виду образ **минимального порядка** вершины n, если в дальнейшем не сказано другого. То есть, если вершина m_2 является образом вершины m_1 порядка k, то m_1 — прообраз m_2 порядка k. Мы в основном будем говорить только о первом, втором и третьем образах вершин и генераторов. Всё потому, что переход больше чем на три образа приводит к переходу на больше чем один порядок, так как каждый генератор состоит из четырёх копий прошлого. Это означает, что любую вершину на генераторе k можно представить как образ некой точки на генераторе k − 1. Следовательно, если искомый образ лежит чрез несколько порядков от начальной вершины, то переход к нему можно представить последовательностью переходов на первый, второй или третий образы.

3. Метод нахождения координат вершины n

Когда я начинал работу, то у меня возникла идея, что, если я найду способ найти координату любой вершины, то смогу и доказать формулу, с которой всё началось. В итоге способ я нашёл, и те формулы, которые я вывел в процессе, помогли мне справиться с изначальной задачей.

Нахождения номеров образов.

Для начала поймём, как найти номер заданной вершины. Будем отталкиваться от того, что длина генератора порядка k равна 4^k. Из этого следует, из вершины можно прийти в любой из её образов, прибавляя по 4^k, где k — её минимальный порядок.

Пусть n_1, n_2, n_3 — первый, второй и третий образы вершины n порядка k. Тогда

$n_1 = n + 4^k$ (1)

$n_2 = n + 2 \cdot 4^k$ (2)

$n_3 = n + 3 \cdot 4^k$ (3)

Пример 1 (рис.11)**.**

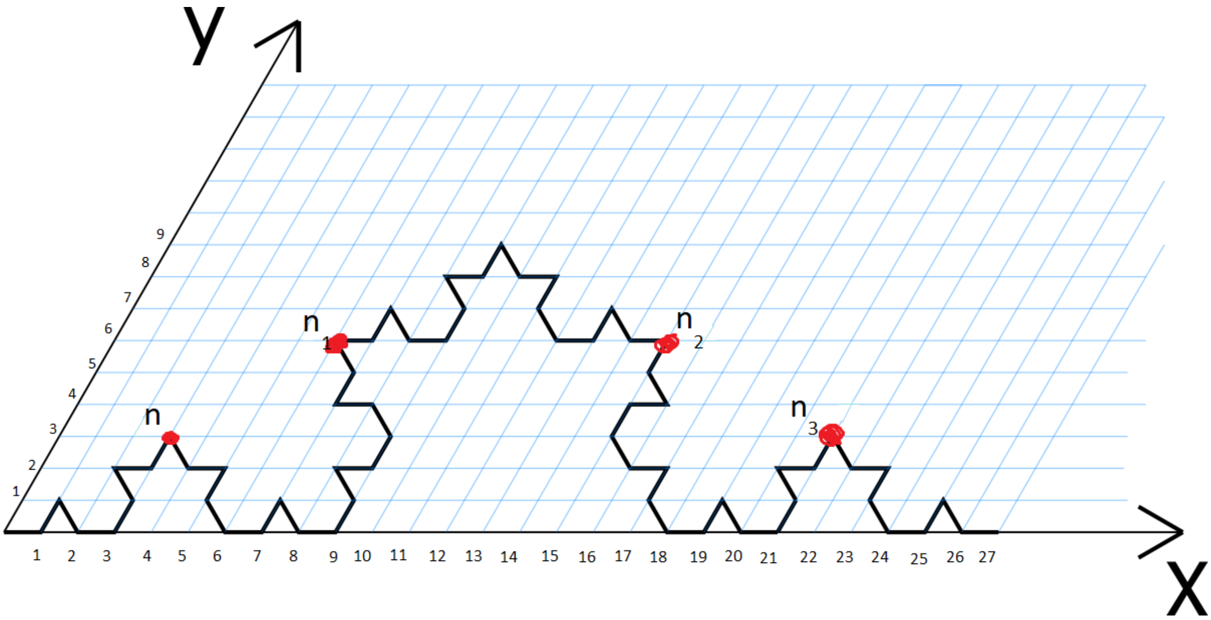

Рис.11

Возьмём точку n = 8, как лежащую на генераторе k = 2.

Тогда $n_1 = 24$, $n_2 = 40$, $n_3 = 56$.

Как найти путь к вершине?

Из формул 1, 2 и 3 следует, что если мы хотим понять, какой последовательностью переходов можно из точки начала координат (0;0) попасть в некоторую другую вершину, то мы должны разложить её номер n на сумму степеней четвёрки от 0 до минимального порядка этой вершины (для этого можно n перевести в четверичную систему счисления). И тогда каждое слагаемое 4^k, $2\cdot4^k$ или $3\cdot4^k$ будет означать переход на первый, второй или третий образ k-того порядка соответственно[3].

Пример 2. Возьмём число 79. В четверичной системе счисления оно записывается как 1033. Таким образом, чтобы попасть в вершину n = 79, нужно из нулевой перейти в третий образ порядка 1, оттуда в третий образ порядка 2, а потом в первый образ порядка 4.

Получение формул координат образов

Теперь получим формулы для нахождения координат образов для любого n.

Для начала разберёмся с тем, как меняются координаты произвольного вектора при повороте на угол, кратный $\pi/3$[4], для этого начнём с простого — с единичного вектора, лежащего на одной одной из осей.

Пусть есть вектор **a** с координатами (1;0) в косоугольной системе координат.

Тогда при повороте на $\pi/3$ его координаты будут (0;1), при повороте на $2\pi/3$ — (−1;1), при повороте на $3\pi/3$ — (−1; 0), при повороте на $4\pi/3$ — (0;−1), и при повороте на $5\pi/3$ — (1;−1). Всё это можно наглядно увидеть на рис. (12).

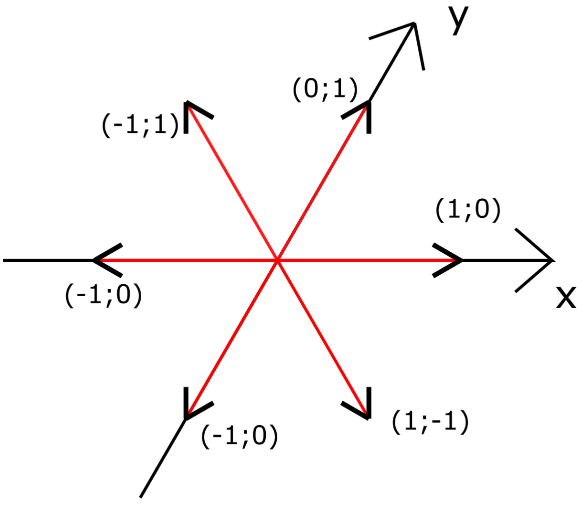

Рис.12

[3] Стоит отметить, что если некоторая степень четвёрки отсутствует при разложении, то есть равна $0\cdot4^k$, то это просто означает, что переход данного порядка не нужен для попадания в эту вершину.

[4] Имеется в виду — к полярному углу вектора прибавили $\pi/3$.

Теперь для вектора **b** с координатами (0;1). Заметим, что этот вектор— это повёрнутый на π/3 **a**. Тогда при повороте **b** на π/3 его координаты будут (−1;1), при 2π/3 — (−1; 0), при 3π/3 — (0;−1), при 4π/3 — (1;−1), при 5π/3 — (1;0).

Теперь рассмотрим произвольный вектор **c**(x;y). Для того, чтобы понять, какими станут его координаты при повороте на π/3, представим его как сумму векторов с координатами (x;0) и (0;y), также повёрнутых на π/3. В таком случае координаты вектора **c** после поворота на π/3 будут (0;x) + (−y;y) = (−y;x+y). Аналогичными рассуждениями получаем, что при повороте вектора **c** на 2π/3 его координаты будут (−x −y; x), при повороте на 3π/3 — (−x; −y), на 4π/3 — (y; −x −y), на 5π/3 — (x+y; −x).

Пусть точка n с координатами (x;y) лежит на генераторе порядка k. Тогда образы этой точки лежат на генераторе порядка k+1. Рассмотрим вектор **p** идущий из начала координат (т.е. из начала образа порядка k) в точку n.

Для того чтобы прийти в первый образ из начала координат нам нужно провести вектор **p**, повёрнутый под углом π/3, из начала второго образа генератора k, т.е. из точки с координатами (3^k;0). При повороте **p** на π/3 его координаты стали (−y; x+y). Таким образом, координаты второго образа точки n будут (3^k − y; x + y).
Аналогичными рассуждениями получаем, что координаты второго образа — (x + y + 3^k; 3^k − x), третьего — (x + 2·3^k; y).

Пусть n_1, n_2, n_3 — первый, второй и третий образ n соответственно, и n лежит на генераторе порядка k. Запишем полученные данные через x(n) и y(n).

$x(n_1) = 3^k - y(n)$; (4)
$y(n_1) = x(n) + y(n)$, (5)

$x(n_2) = x(n) + y(n) + 3^k$; (6)
$y(n_2) = 3^k - x(n)$, (7)

$x(n_3) = x(n) + 2\cdot 3^k$; (8)
$y(n_3) = y(n)$. (9)

Алгоритм нахождения координат вершины

В итоге, зная формулы 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а также умея находить последовательность переходов из нулевой вершины в вершину n, можно составить алгоритм нахождения координат для любой вершины.

1. **Найти** минимальный порядок этой вершины. Для этого нужно понять, между какими степенями четвёрки она находится, и меньшая из них будет искомым порядком. В случае же если n вершины равняется четвёрке в некоторой степени, то, по нашей классификации, она принадлежит порядку, равному этой степени.
2. Записать номер n вершины в четверичной системе счисления. Тогда единица означает переход на первый образ, двойка — на второй, тройка — на третий, причём порядок этого перехода будет на один меньше, чем позиция цифры в числе, а ноль, в свою очередь, означает лишь то, что для попаданию в эту вершину из нулевой точки переход этого порядка не нужен, поэтому его можно игнорировать.
3. Учитывая прошлый пункт, прочитать число справа налево, выражая координаты прообразов через координаты начальной точки (0;0), в итоге доходя до искомого n.

Пример 3. Мы хотим найти координаты n = 88.

Первое, 88 лежит между 64 и 256, а значит минимальный порядок равен 4.

Второе, переводим 88 в четверичную систему счисления. Получаем число 1120.

Третье, данное число означает, что n = 88 — первый образ первого образа второго образа порядка 2 начальной точки (0;0). Обозначим эти промежуточные вершины как m_1, m_2 и т.д.

Читаем число справа налево, получаем:

Первая цифра ноль, её мы пропускаем, но не забываем, что тогда будем брать k сразу за единицу.

Вторая цифра — 2, применим формулы 6 и 7, k = 1

$x(m_1) = 3^1 + x(0) + y(0) = 3 + 0 + 0 = 3;$

$y(m_1) = 3^1 - x(0) = 3 - 0 = 3.$

Третья цифра — 1, значит нам нужен первый образ, то есть формулы 4 и 5

$x(m_2) = 3^2 - y(m_1) = 9 - 3 = 6$;

$y(m_2) = x(m_1) + y(m_1) = 3 + 3 = 6.$

И последняя цифра — опять 1, те же формулы, но k = 3. Причём здесь уже можно писать n, а не m_3, так как это конечный переход, а значит мы придём в искомую вершину.

$x(n) = 3^3 - y(m_2) = 27 - 6 = 21;$

$y(n) = x(m_2) + y(m_2) = 6 + 6 = 12.$

Итак, мы нашли, что $x(88) = 21$, а $y(88) = 12$.

Стоит отметить, что даже несмотря на то, что данный способ не представляет собой просто две формулы, в которые мы подставляем n и получаем x(n) и y(n), он всё равно во много раз быстрее и удобнее, чем графический (рисовать кривую и отсчитывать клеточки), так как он позволяет находить координаты любой вершины, даже при очень больших n.

Программная реализация алгоритма на языке Python

```
n = int(input('Ведите номер вершины (отсчёт начинается с нуля)\n'))
x = 0
y = 0
#Перевод в четверичную систему счисления
N = ''
while n > 0:
   N = str(n % 4) + N
   n = n // 4
# Нахождение координат используя формулы координат прообразов
k = 0

for i in range(len(N)-1,-1, -1 ):

   a = x
   b = y
   if N[i] == '0':
       k = k+1
   elif N[i] == '1':
       x = 3**k - b
       y = a + b
       k = k + 1

   elif N[i] == '2':
       x = a + b + 3**k
       y = 3**k - a
       k = k + 1

   elif N[i] == '3':
       x = a + 2*(3**k)
       y = b
       k = k + 1

print('(',x,';',y, ')' )
```

Дополнительные формулы прообразов.

Также стоит отметить, что если читать число слева направо, то получиться последовательность переходов в другую сторону — от n к его прообразам и до начальной точки. Зная, как находить координаты образов, легко вывести формулы и такого преобразования.

Обозначим прообраз n как n_0, тогда:

Если n лежит во втором образе, то

$x(n_0) = x(n) + y(n) - 3^k$; (10)

$y(n_0) = 3^k - x(n)$. (11)

Если n лежит в третем образе, то

$x(n_0) = 3^k - y(n_0)$; (12)

$y(n_0) = x(n) + y(n) - 2{\cdot}3^k$. (13)

Если n лежит в четвёртом образе, то

$x(n_0) = x(n) - 2{\cdot}3^k$; (14)

$y(n_0) = y(n)$. (15)

4. Формулы для координат вершины 2n

И теперь финальная часть. Как уже упоминалось в введении, ещё одной целью работы было доказать формулу $x(n) = y(2n) + y(n)$. Однако, в процессе поисков обоснования этой формулы, я смог вывести ещё одну похожую формулу, но уже с участием $x(2n)$. Запишем обе эти формулы:

$x(2n) \quad = x(n) + 2{\cdot}y(n)$; (16)

$y(2n) \quad = x(n) - y(n)$. (17)

Для их доказательства воспользуемся методом математической индукции.

Рассмотрим генератор первого порядка.Он состоит из четырёх вершин, их координаты соответственно — (0;0). (1;0), (1;1), (2;0).

Применим формулы для нахождения координат 2n для этого генератора.

Для нулевой вершины (а я напоминаю, что у нас отсчёт идёт с нуля, иначе формулы не будут работать) координаты — (0;0), n = 0, 2n = 0 тогда, подставив в формулы 16 и 17 координат 2n, получаем:

$x(2{\cdot}0) = x(0) + 2{\cdot}y(0)$;

$y(2{\cdot}0) = x(0) - y(0)$.

$0 = 0$;

$0 = 0$.

Как мы можем видеть, всё верно. Тогда, пусть истинность данных формул для генератора первого порядка будет базой индукции.

Для первой вершины (1;0) n = 1, 2n = 2, координаты второго отрезка (1;1), тогда по формулам 16 и 17

$x(2) = x(1) + 2 \cdot y(1) \quad = 1 + 0 \qquad = 1;$

$y(2) = x(1) - y(1) \quad = 1 - 0 \qquad = 1.$

Для второй вершины(1;1) n = 2, 2n = 4, координаты четвёртого отрезка (3;0), тогда

$x(4) = x(2) + 2 \cdot y(2) \quad = 1 + 2 \qquad = 3;$

$y(4) = x(2) - y(2) \quad = 1 - 1 \qquad = 0.$

Для третьей вершины (2;0) n = 3, 2n = 6, координаты шестого отрезка (2;2), тогда

$x(6) = x(3) + 2 \cdot y(3) \quad = 2 + 0 \qquad = 2;$

$y(6) = x(3) - y(3) \quad = 2 - 0 \qquad = 2.$

Для всех четырёх вершин генератора первого порядка формулы подошли.

Теперь перейдём к шагу индукции. Докажем, что если данные формулы работают для генератора одного порядка, то они работают и для следующего.

Пусть для всех вершин n на генераторе порядка k верны формулы $x(2n) = x(n) + 2 \cdot y(n)$ и $y(2n) = x(n) - y(n)$ и пусть m — произвольная вершина на генераторе порядка k+1.

Тогда есть шесть возможных случаев.

1) $4^k \leqslant m < 1{,}5 \cdot 4^k$ — то есть m лежит на первой половине первого образа генератора k.

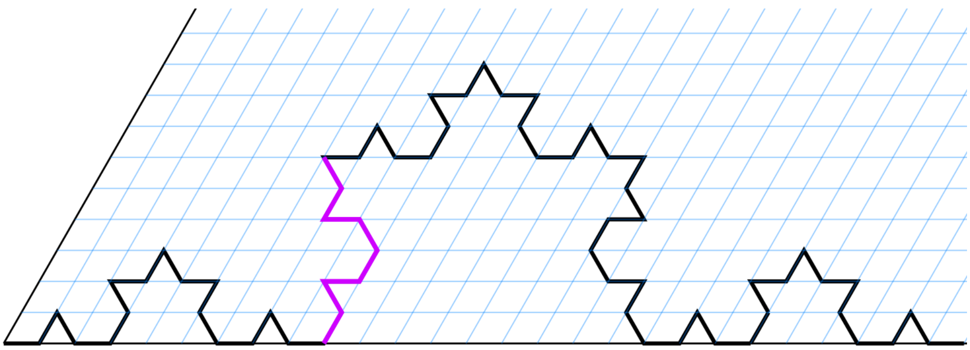

Рис.13. На этом и последующих рисунках за генератор k принимается генератор второго порядка, а фиолетовым цветом выделена область, в которой может находиться вершина m при данном условии.

2) $1{,}5\cdot4^k \leqslant m < 2\cdot4^k$ — m лежит на второй половине первого образа генератора k.

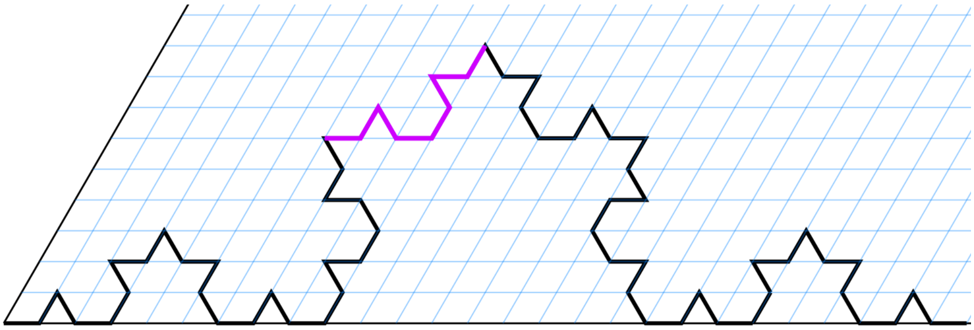

Рис.14

3) $2\cdot4^k \leqslant m < 2{,}5\cdot4^k$ — m лежит на первой половине второго образа генератора k.

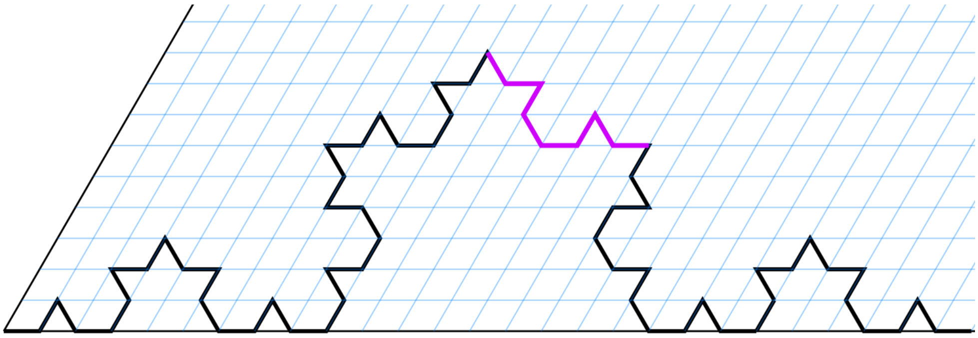

Рис.15

4) $2{,}5\cdot4^k \leqslant m < 3\cdot4^k$ — m лежит на второй половине второго образа генератора k.

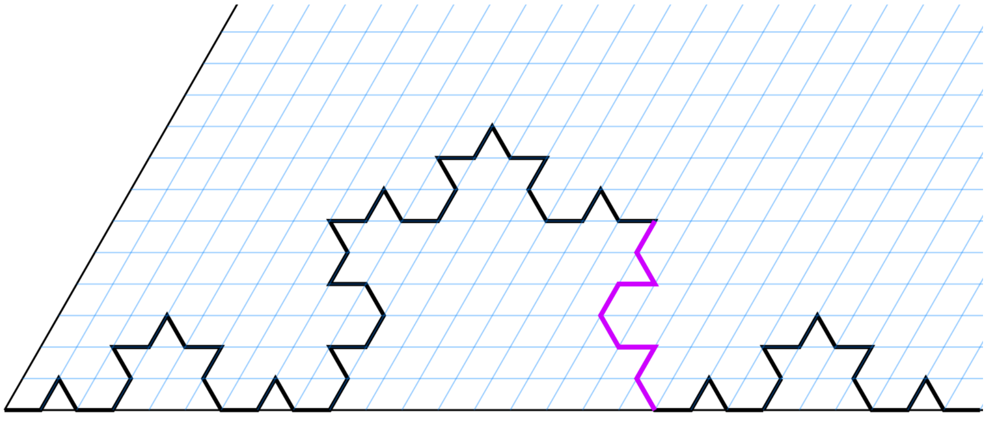

Рис. 16

5) $3{\cdot}4^k \leqslant m < 3{,}5{\cdot}4^k$ — m лежит на первой половине третьего образа генератора k.

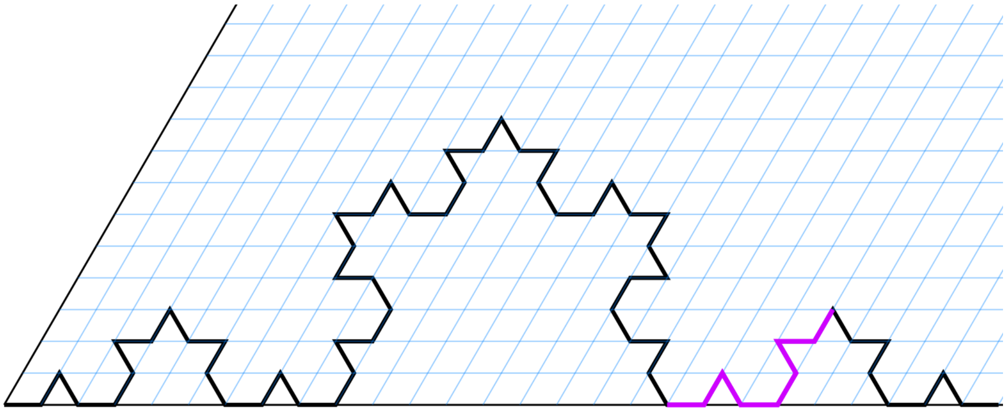

Рис. 17

6) $3{,}5{\cdot}4^k \leqslant m < 4^{k+1}$ — m лежит на второй половине третьего образа генератора k.

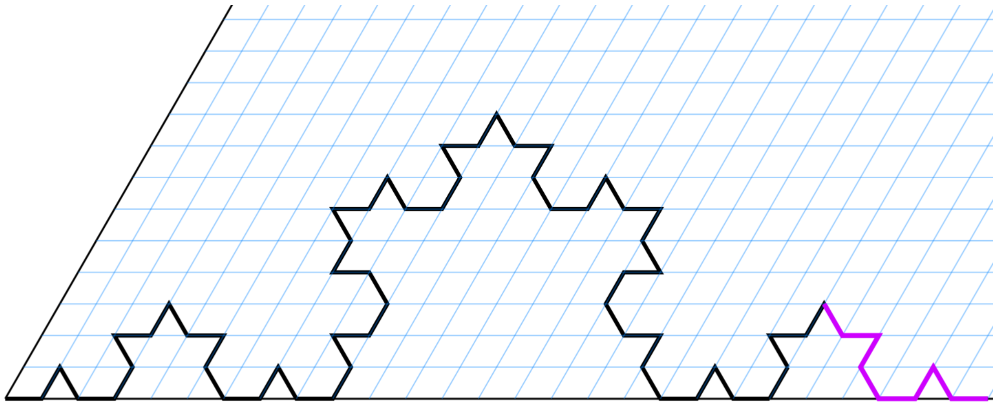

Рис. 18

Рассмотрим каждый случай отдельно

1. Если $4^k \leqslant m < 1{,}5{\cdot}4^k$, то имеется некая вершины с номером n, равным $m - 4^k$, следовательно $m = n + 4^k$, тогда m — первый образ n, а значит по формулам 4 и 5
   $x(m) = 3^k - y(n)$,
   $y(m) = x(n) + y(n)$.
   Так же в таком случае $2m = 2{\cdot}4^k + 2n$, из чего следует по формуле 2 что 2m находится во втором образе генератора k (так как $0 \leqslant n < 4^k/2$) и является вторым образом 2n.
   Тогда $x(2m) = x(2n) + y(2n) + 3^k$ и $y(2m) = 3^k - x(2n)$ по формулам 6 и 7. Применяя формулы 16 и 17, которые верны по допущению, получаем, что

   $x(2m) = x(n) + 2y(n) + x(n) - y(n) + 3^k \quad = 3^k - y(n) + 2{\cdot}(x(n) + y(n)) \quad = x(m) + 2{\cdot}y(m);$
   $y(2m) = 3^k - x(n) - 2{\cdot}y(n) \quad = 3^k - y(n) - (x(n) + y(n)) \quad = x(m) - y(m).$

Как мы можем видеть, если формулы верны для 2n, то, в данном случае, они верны и для 2m.

2. Если $1{,}5\cdot4^k \leqslant m < 2\cdot4^k$, то имеется некая вершины с номером n, равным $m - 4^k$, следовательно $m = n + 4^k$, тогда по формуле 1 m — первый образ n, а значит по формулам 4 и 5

   $x(m) = 3^k - y(n)$,

   $y(m) = x(n) + y(n)$.

   Так же в таком случае $2m = 2\cdot4^k + 2n$, из чего следует что 2m находится в третьем образе генератора k (так как $4^k/2 \leqslant n < 4^k$) и является третьем образом прообраза 2n .

   Пусть n_1 — прообраз 2n, тогда 2m — его третий образ, а 2n — первый, следовательно

   $x(n_1) = y(2n) + x(2n) - 3^k$, значит $x(2m) = y(2n) + x(2n) + 3^k$

   и $y(n_1) = 3^k - x(2n) = y(2m)$

   Применяя формулы 16 и 17, которые верны по допущению, получаем, что

   $x(2m) = x(n) - y(n) + x(n) + 2\cdot y(n) + 3^k = 3^k - y(n) + 2\cdot(x(n) + y(n)) = x(m) + 2\cdot y(m)$;

   $y(2m) = 3^k - x(n) - 2\cdot y(n) \qquad = 3^k - y(n) - (x(n) + y(n)) \qquad = x(m) - y(m)$.

   Как мы можем видеть, если формулы верны для 2n, то, в данном случае, они верны и для 2m.

3. Если $2\cdot(4^k) \leqslant m < 2{,}5\cdot4^k$, то имеется некая вершины с номером n, равным $m - 2\cdot4^k$, следовательно $m = n + 2\cdot(4^k)$, тогда по формуле 2 m — второй образ n, а значит по формулам 6 и 7

   $x(m) = x(n) + y(n) + 3^k$,

   $y(m) = 3^k - x(n)$.

   $2m = 2\cdot4^k + 2n$, из чего следует, что 2m находится в втором образе генератора k+1 (так как $0 \leqslant n < 4^k/2$) и является пятым образом 2n на генераторе k.

   Четвёртый образ отличается от первого только тем, что он сдвинут по оси x на $2\cdot3^k$, поэтому

   $x(2m) = 3^{k+1} - y(2n)$,

   $y(2m) = x(2n) + y(2n)$

   Применяя формулы 16 и 17, которые верны по допущению, получаем, что

   $x(2m) = 3\cdot3^k - x(n) + y(n) \qquad = x(n) + y(n) + 3^k + 2\cdot3^k - 2\cdot x(n)$;

   $y(2m) = x(n) + 2\cdot y(n) + x(n) - y(n) = 2\cdot x(n) + y(n)$.

   $x(n) + y(n) + 3^k + 2\cdot3^k - 2\cdot x(n) = x(n) + y(n) + 3^k + 2\cdot(3^k - x(n)) = x(m) + 2\cdot y(m)$;

   $2\cdot x(n) + y(n) \qquad = x(n) + y(n) + 3^k - (3^k - x(n)) \qquad = x(m) - y(m)$.

Как мы можем видеть, если формулы верны для 2n, то, в данном случае, они верны и для 2m.

4. Если $2{,}5\cdot4^k \leqslant m < 3\cdot4^k$, то есть некоторое n, равное $m - 2\cdot4^k$, следовательно $m = n + 2\cdot4^k$, тогда m — второй образ n, а значит по формулам 6 и 7

   $x(m) = x(n) + y(n) + 3^k$,

   $y(m) = 3^k - x(n)$.

   $2m = 4\cdot4^k + 2n$, из чего следует что 2m находится на пятом образе генератора k ($4^k/2 \leqslant n < 4^k$) и является вторым образом 2n порядка k+1. Поэтому

   $x(2m) = 3^{k+1} - y(2n)$;

   $y(2m) = x(2n) + y(2n)$.

   Применяя формулы 16 и 17, которые верны по допущению, получаем, что

   $x(2m) = 3\cdot3^k - x(n) + y(n) \quad = (x(n) + y(n) + 3^k) + 2\cdot(3^k - x(n)) = x(m) + 2\cdot y(m)$;

   $y(2m) = x(n) + 2\cdot y(n) + x(n) - y(n) \quad = x(n) + y(n) + 3^k - (3^k - x(n)) \quad = x(m) - y(m)$.

   Как мы можем видеть, если формулы верны для 2n, то, в данном случае, они верны и для 2m.

5. Если $3\cdot4^k \leqslant m < 3{,}5\cdot4^k$, то есть некоторое n, равное $m - 3\cdot4^k$, следовательно $m = n + 3\cdot(4^k)$, тогда по формуле 3 m — третий образ n, а значит по формулам 8 и 9

   $x(m) = x(n) + 2\cdot3^k$,

   $y(m) = y(n)$.

   $2m = 6\cdot4^k + 2n$, из чего следует что 2m находится на шестом образе генератора k ($0 \leqslant n < 4^k/2$) и является первым образом третьего образа 2 порядка k+1. Пусть n_1 — первый образ 2n, тогда

   $x(2m) = 3^{k+1} - y(n_1) \quad = 3^{k+1} - 3^k + x(2n) \quad = 2\cdot3^k + x(2n)$;

   $y(2m) = x(n_1) + y(n_1) = x(2n) + y(2n) + 3^k + 3^k - x(2n) \quad = 2\cdot3^k + y(2n)$.

   Применяя формулы 16 и 17, которые верны по допущению, получаем, что

   $x(2m) = 2\cdot3^k + x(n) + 2\cdot y(n) \quad = x(m) + 2\cdot y(m)$;

   $y(2m) = 2\cdot3^k + x(n) - y(n) \quad = x(m) - y(m)$.

   Как мы можем видеть, если формулы верны для 2n, то, в данном случае, они верны и для 2m.

6. Если $3{,}5\cdot4^k \leqslant m < 4^{k+1}$, то есть некоторое n, равное $m - 3\cdot4^k$, следовательно $m = n + 3\cdot(4^k)$, тогда по формуле 3 m — третий образ n, а значит по формулам 8 и 9

   $x(m) = x(n) + 2\cdot3^k$,

   $y(m) = y(n)$.

$2m = 6 \cdot 4^k + 2n$, следовательно $2m$ лежит на седьмом образе прообраза $2n$. Восьмой образ — это первый образ третьего образа. Пусть n_1 — прообраз $2n$, n_2 — третий образ n_1.
Тогда $2m$ — первый образ n_2 $(4^k/2 \leqslant n < 4^k)$.
$x(n_1) = x(2n) + y(2n) - 3^k;$
$y(n_1) = 3^k - x(2n).$

$x(n_2) = x(n_1) + 2 \cdot 3^k = x(2n) + y(2n) + 3^k;$
$y(n_2) = y(n_1) = 3^k - x(2n).$

$x(2m) = 3^{k+1} - y(n_2) = 3^{k+1} - (3^k - x(2n)) = 2 \cdot 3^k + x(2n);$
$y(2m) = x(n_2) + y(n_2) = x(2n) + y(2n) + 3^k + 3^k - x(2n) = y(2n) + 2 \cdot 3^k.$

Применяя формулы 16 и 17, которые верны по допущению, получаем, что
$x(2m) = 2 \cdot 3^k + x(n) + 2 \cdot y(n) = x(m) + 2 \cdot y(m);$
$y(2m) = x(n) - y(n) + 2 \cdot 3^k = x(m) - y(m).$

Как мы можем видеть, во всех из шести случаев, если формулы верны для генератора порядка k, то они верны и для порядка k+1.
Из этого следует, согласно принципу математической индукции, что формулы
$x(2n) = x(n) + 2 \cdot y(n)$ и $y(2n) = x(n) - y(n)$ верны для всех вершин ломаной, что и требовалось доказать.

5. Наклон рёбер

В процессе работы мной была обнаружена ещё одна интересная закономерность, которую тоже хотелось бы упомянуть.
Разберёмся с тем, как наклонены рёбра ломаной. Поскольку все повороты кратны $\pi/3$, то всего может быть шесть вариантов направления каждого отрезка (рис. 5.1), и, соответственно, три варианта наклона[5] (рис. 5.2).

[5] Под наклоном подразумевается угол между осью x и прямой, на которой лежит ребро.

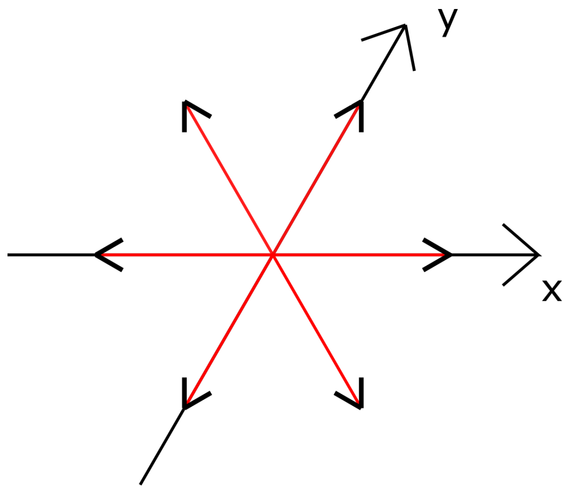

Рис. 19

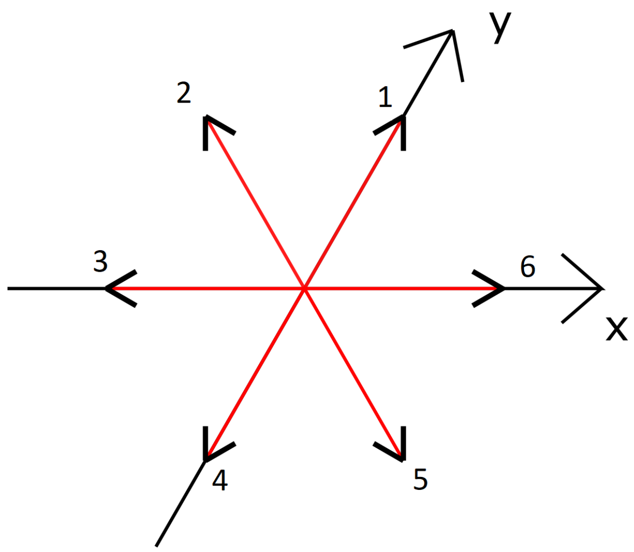

Рис. 20.Направления 3 и 6 соответствуют наклону на 0, 2 и 5 — наклон на $-\pi/3$, 4 и 1 — наклон на $\pi/3$

При рассмотрении ломаной можно заметить один интересный факт. Наклоны рёбер чередуются в последовательности 0, $\pi/3$, $-\pi/3$, 0, $\pi/3$, $-\pi/3$… и так далее. Докажем, что это всегда будет так. Для этого воспользуемся методом математической индукции.

Рассмотрим генератор первого порядка. Он состоит из четырёх отрезков, с наклонами 0, $\pi/3$, $-\pi/3$, 0 соответственно. Как можно видеть, внутри него данная последовательность сохраняется, возьмём это за базу индукции.

Теперь докажем, что если на генераторе порядка k сохраняется данная последовательность, и наклоны его первого и последнего ребра равны нулю[6], то последовательность будет верна и для генератора порядка k+1.

Генератор k + 1 состоит из четырёх генераторов k. Как мы уже обсуждали ранее, первый образ генератора отличается от него самого только поворотом на $\pi/3$. При повороте прямой с наклоном 0 на $\pi/3$ получится прямая с наклоном $\pi/3$. С наклоном $\pi/3$ — $-\pi/3$, а с наклоном $-\pi/3$ — 0. Таким образом, если последовательность 0, $\pi/3$, $-\pi/3$ сохраняется верна для генератора k, т о она верна и для его первого образа. Аналогично можно доказать её правильность для второго и для третьего. Теперь вспомним про крайние рёбра генераторов. Если первое и последнее ребро генератора k имеют наклон 0, то соответствующие рёбра его первого образа — $\pi/3$, второго — $-\pi/3$, третьего — 0. Причины этого обсуждены в подразделе про образы. Это означает, что для последнего ребра генератора k, с наклоном 0, и начального ребра его первого образа, с наклоном $\pi/3$, последовательность продолжает быть верной. Аналогично это утверждение верно и для ребёр, соединяющих первый и второй, и второй и третий образы. Поэтому если последовательность верна для генератора k, то она верна и для его первых трёх образов, и для рёбер, соединяющих образы, а значит, верна и для генератора порядка k+1. Отсюда, согласно принципу математической индукции, следует, что последовательность верна и для всей ломаной.

6. Заключение

1. Сформулирован понятийный аппарат для удобной работы с ломаной (раздел 2).
2. Разработан метод нахождения координат любой вершины (раздел 3).
3. В результате анализа объекта удалось обнаружить парную формулу к уже известной, и в последующем сформулировать доказательство этих двух формул (раздел 4).

[6] Это уточнение важно, так как именно из данной последовательности следует, что крайние рёбра всех генераторов параллельны оси x, даже несмотря на то, что этот факт очевиден с первого взгляда.

7. Источники

1. *Von Koch, H.*. Une méthode géométrique élémentaire pour l’étude de certaines questions de la théorie des courbes planes — Acta Mathematica — 1906 — том 30 — С.145–174,.
2. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы — 2001 — С.30.
3. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей (The on-line encyclopedia of integer sequences), последовательность A335358. https://oeis.org/A335358
4. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей (The on-line encyclopedia of integer sequences), последовательность A335359. https://oeis.org/A335359