

Международная олимпиада молодежи – 2022

Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 13	Мах 13	Мах 16	Мах 16	Мах 100

МАТЕМАТИКА

10 класс

Вариант 1

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1.

Вычислите $\frac{0,6 \cdot (1,8 \cdot 0,5) \cdot 10}{(0,25 \cdot 8 \cdot 4) \cdot 0,375}$.

(7 баллов)

Ответ: _____

Задача 2.

Билет на поезд из Перми в Казань стоит 750 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 6 литров топлива на 100 километров пути, расстояние по шоссе между этими городами составляет 800 километров, а цена топлива равна 26 рублям за литр. Найдите стоимость (в рублях) наиболее дешевой поездки для 2 человек. (7 баллов)

Ответ: _____

Задача 3.

Вычислите произведение корней уравнения $(x^2 + 2)^2 + x^4 = 20$.

(7 баллов)

Ответ: _____

Задача 4.

Найдите сумму всех целых x , при которых определена функция

$$y = \sqrt{|x - 3| \cdot (x - 2)} + \sqrt{3 - |x - 1|} + \sqrt{x^2 + 2x - 15}$$

(7 баллов)

Ответ: _____

Задача 5.

Точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит боковую сторону на отрезки длины 2 см и 3 см, считая от общей вершины равных сторон. Найдите площадь треугольника (в см^2). (7 баллов)

Ответ: _____

Задача 6.

Найдите наименьшее целое значение a , при котором один из корней уравнения $x^2 + 3x - a - 5 = 0$ больше 2, а другой меньше 2. (7 баллов)

Ответ: _____

Задача 7.

Точки B и C лежат на окружности с диаметром AD , а через точку D проведена касательная l к этой окружности. Обозначим как P точку пересечения прямой AB с прямой l , а Q – точку пересечения прямой AC с l . Вычислите CQ , если $AB = 46.08$, $AC = 28.8$ и $BP = 3.92$.

Ответ: _____

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8.

Найдите все такие вещественные числа x , что $[50x + 97] = 50 + 97x$.

Комментарий: квадратными скобками $[x]$ обозначена функция взятия целой части числа x (то есть максимального целого числа, не превосходящего x).

(13 баллов)

Ответ: _____

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9.

Двое играют в игру на доске 7×7 по следующим правилам. Первый игрок выбирает поле на доске и ставит туда шахматного коня. Далее каждый из игроков, начиная со второго, по очереди делают ходы этой фигурой по шахматным правилам. Выходить за пределы доски или ставить фигуру на ранее посещённое поле запрещено. Тот, кто не может сделать свой очередной шаг – проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Комментарий: по правилам, конь ходит так: от текущей клетки конь перемещается сначала на 2 клетки по горизонтали или вертикали, затем на 1 клетку в перпендикулярном направлении. Считается, что из начальной клетки хода в конечную клетку хода конь перемещается “прыжком”.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство:

Задача 10.

Найдите все простые числа p , для которых существуют такие целые числа m и n , что $p = m^2 + n^2$ и число $m^3 + n^3 + 8mn$ делится на p . (16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство: