

Международная олимпиада молодежи – 2022

Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 13	Мах 13	Мах 16	Мах 16	Мах 100

МАТЕМАТИКА

10 класс

Вариант 4

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1.

Вычислите $\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-6} : \left(\left(-\frac{1}{5}\right)^2\right)^{-9} + (-5^{-1})^{-2}$.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 2.

Цена на некоторый товар выросла на 150 %. На сколько процентов должна быть снижена цена для возврата к первоначальному значению? (7 баллов)

Ответ: _____

Задача 3.

Найдите сумму действительных корней уравнения

$$x^2 - x + 9 + \sqrt{x^2 - x + 9} = 12$$

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 4.

Найдите наибольшее значение x , при котором определена функция $y = \sqrt{2 + \sqrt{x} - x}$.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 5.

Отношение длины описанной около правильного многоугольника окружности к его стороне равно $\pi \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. Найдите количество сторон такого многоугольника. (7 баллов)

Ответ: _____

Задача 6.

Укажите наименьшее целое значение a , при котором система уравнений $\begin{cases} y = -|x - a| - 1 \\ x = -\sqrt{-2y - y^2} \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 7.

Дан прямоугольник $ABCD$. Снаружи прямоугольника отмечены следующие четыре точки: на луче DA отмечена точка D_A , на луче BA отмечена B_A , на луче DC отмечена D_C , на луче BC отмечена B_C . Известны следующие площади: площадь треугольника BCD_C равна 18, площадь треугольника DCB_C равна 16, площадь треугольника BAD_A равна 15, площадь треугольника DAB_A равна 12. Найдите чему равно отношение площади треугольника D_CCB_C к площади треугольника D_AAB_A .

Ответ: _____

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8.

На плоскости расположены n различных прямых, причём каждая из них пересекает ровно 2222 другие. Какие значения может принимать n ? (Приведите все возможные варианты)

Ответ: _____ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9.

Маша хочет сделать клумбу в форме квадрата $n \times n$ (разбитого дорожками на n^2 единичных квадратов) и посадить в нём 211 кустов розы. При этом Маша хочет, чтобы количество кустов розы в каждом двух соседних по стороне единичных квадратах отличалось ровно на 1 (в квадрате может расти и сразу несколько кустов, а может и не расти ни одного). При каком максимальном n это возможно? (16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство:

Задача 10.

Найдите все натуральные a , для которых числа $3n + 1$ и $an + 1$ взаимно просты при всех натуральных n . (16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство: