

Международная олимпиада молодежи – 2022

*Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!*

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	<b>Итого баллов</b>
	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 13	Мах 13	Мах 16	Мах 16	<b>Мах 100</b>

**МАТЕМАТИКА**

**11 класс**

**Вариант 1**

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

---

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

**Задача 1.**

Найдите значение выражения  $x + y$ , если  $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 2.**

Числа  $a, b, c$  таковы, что  $a : b : c = 2 : 3 : 15$ . Число  $a$  уменьшили на 10%,  $b$  увеличили на 20%, а значение  $c$  – не изменили. На сколько процентов изменилось значение суммы этих трех чисел?

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 3.**

Укажите количество целых чисел, заключенных между корнями уравнения

$$2x^2 + 3x - 17 = 2(11 - 4\sqrt{7}) + 3(\sqrt{7} - 2) - 17$$

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 4.**

Найдите наименьшее целое  $x$ , при котором определена функция

$$y = \sqrt{\frac{3+x}{x-1}} + \sqrt{x}$$

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 5.**

Площадь правильного треугольника составляет  $16\sqrt{3}/3$  см<sup>2</sup>. Найдите его биссектрису (в см).

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 6.**

Найдите наибольшее натуральное  $a$ , при котором система уравнений  $\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$  имеет меньше четырех решений.

**Ответ:** \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 7.**

Найдите все такие положительные числа  $x$ , что

$$\frac{1}{[x]} - \frac{1}{[2x]} = \frac{1}{6\{x\}}$$

*Комментарий:* квадратными скобками  $[x]$  обозначена функция взятия целой части числа  $x$  (то есть максимального целого числа, не превосходящего  $x$ ), а фигурными скобками  $\{x\}$  – дробная часть числа  $x$ , по определению равная  $\{x\} := x - [x]$ .

**Ответ:** \_\_\_\_\_

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

**Тезисное доказательство:**



**Задача 8.**

Угол  $B$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ , а угол  $C$  этого треугольника равен  $54^\circ$ . На стороне  $AC$  отметили такую точку  $P$ , что периметр четырёхугольника  $ABMP$  равен периметру треугольника  $PMS$ . Найдите величину угла  $MPC$ .

**Ответ:** \_\_\_\_\_ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

**Тезисное доказательство:**

**Задача 9.**

В спортзале бегают 71 первоклассник. Старшеклассникам Коле и Сергею дали список этих школьников и велели занести их в таблицу в порядке возрастания роста (известно, что они все различного роста). Коля и Сергей решили выполнить это задание так: Коля называет любых трёх первоклассников по списку, а Сергей их ловит, сравнивает по росту и сообщает Коле кто из троих по росту средний (Коля сам не смотрит, а только слушает ответы Сергея). Какое максимальное количество школьников Коля сможет гарантированно поставить в списке на правильную позицию (по возрастанию) после 1225 вопросов?

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное решение:

**Задача 10.**

Натуральные числа  $m$  и  $n$  таковы, что  $3^m - 2^n$  делится на 47. Какой остаток может давать число  $4m + n$  при делении на 23? (16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное решение: