

Международная олимпиада молодежи – 2022

*Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!*

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 7	Мах 13	Мах 13	Мах 16	Мах 16	Мах 100

**МАТЕМАТИКА**

**11 класс**

**Вариант 5**

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

---

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

**Задача 1.**

Периметр прямоугольника равен 30 см. Если одну его сторону уменьшить на 2 см, а другую увеличить на 4 см, то площадь прямоугольника уменьшится на  $8 \text{ см}^2$ . Найдите площадь первоначального прямоугольника.

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 2.**

Сплавляли два металла с некоторым содержанием золота. Масса первого металла – 5 кг, с содержанием золота не менее 12% и не более 32%. Масса второго сплава 9 кг, с содержанием золота не менее 40% и не более 60%. Найдите минимально возможное значение процентного содержания золота в новом сплаве.

**Ответ:** \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 3.**

Найдите сумму всех целочисленных значений  $x$  и  $y$ , для которых справедливо равенство  $xy - 2y - 7x + 19 =$

*Комментарий:* для каждого решения  $(x, y)$  надо добавить в общую сумму и  $x$ , и  $y$ .

**Ответ:** \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 4.**

Найдите наименьшее значение  $a$ , при котором функция  $y = \sqrt[4]{(a-1)x^2 - 2(a-3)x + 3a-9}$  определена на всей числовой оси.

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 5.**

Усеченный конус с радиусами оснований 3 см и 5 см и полный конус такой же высоты имеют равные объемы. Найдите радиус основания полного конуса (в см).

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 6.**

Вычислите периметр границы области, задаваемой системой 
$$\begin{cases} 2|x + 3| \arcsin \frac{(y - 1)^2}{16} \leq \pi(x + 3) \\ 3|y - 1| - 4x \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: \_\_\_\_\_

(7 баллов)

**Задача 7.**

Треугольники  $ABC$  и  $ABD$  вписаны в одну и ту же окружность диаметра  $AB = 15$ . Прямая, проходящая через  $D$  перпендикулярно  $AB$  пересекает  $AB$  в точке  $P$ , сторону  $AC$  в точке  $Q$  и продолжение стороны  $BC$  в точке  $R$ . Найдите длину  $DP$  если  $PR = 40/3$  и  $PQ = 15/4$ .

**Ответ:** \_\_\_\_\_

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

**Тезисное доказательство:**



**Задача 8.**

На отрезке  $[0, 1]$  вещественной прямой отмечены красным цветом 999 точек, которые делят интервал на 1000 равных частей. Также зелёным цветом отмечены 1110 точек, которые делят этот интервал на 1111 равных отрезков. Пусть минимальная длина отрезка с концами разного цвета равна  $d$  (точки 0 и 1 не красятся ни в какие цвета,  $d > 0$ ). Укажите все пары точек красного и зелёного цвета расстояние между которыми равно  $d$ .

**Ответ:** \_\_\_\_\_

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

**Тезисное доказательство:**

**Задача 9.**

Мы будем говорить, что список натуральных чисел допустим, если все его числа меньше или равны 100, а их сумма больше 1810. Найдите наименьшее натуральное число  $d$  такое, что в каждом допустимом списке можно вычеркнуть некоторые числа, чтобы сумма оставленных неперечеркнутых чисел больше или равна  $1810 - d$  и меньше или равна  $1810 + d$ .

*УТОЧНЕНИЕ.* В списке могут быть повторяющиеся номера.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное решение:

**Задача 10.**

Решите в натуральных числах уравнение  $5^a + 3^b - 2^c = 32$ .

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное решение: