***Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!***

| Ш И Ф Р | Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 | Задача 8 | Задача 9 | Задача 10 | **Итого баллов** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Max 7 | Max 7 | Max 7 | Max 7 | Max 7 | Max 7 | Max 13 | Max 13 | Max 16 | Max 16 | **Max 100** |
| | | | | | | | | | | | |

# МАТЕМАТИКА

## 11 класс

## Вариант 7

Время выполнения заданий – 180 минут
Максимальная оценка – 100 баллов

---

*1. В задачах <u>первого блока №№ 1-6</u> необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.*

*2. Решения задач <u>второго блока №№ 7-8</u> необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.*

*3. В задачах <u>третьего блока №№ 9-10</u> необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.*

**Задача 1.**

Вычислите $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots+\dfrac{1}{2017^2+3\cdot 2017+2}$.

**Ответ:** ______________ (7 баллов)

**Задача 2.**

Для заполнения бассейна используют 2 насоса. Известно, что если включить первый на 3 ч, а затем только второй на 4 ч, бассейн будет заполнен не меньше чем на 50% и не более чем на 80%. Если включить первый на 2 ч, затем только второй на 6 ч бассейн будет наполнен не меньше чем на 55% и не больше чем на 70%. Найдите максимально возможное значение процента заполнения бассейна после работы первого насоса в течении 1 ч.

**Ответ:** ____________ (7 баллов)

**Задача 3.**

Для любого числа $x$ и функции $f$ выполняется соотношение $f(2x-1) = 1 - 4x^2$. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ при $x \in [-3; 0]$.

**Ответ:** ______________ (7 баллов)

## Задача 4.

Найдите количество целых решений неравенства $\dfrac{|x^2-1|+x+1}{x^2-2x} \leqslant 0$.

**Ответ:** ______________ (7 баллов)

**Задача 5.**

Площадь основания конуса равна площади поверхности вписанного в него шара. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

**Ответ:** ______________ (7 баллов)

**Задача 6.**

Укажите наименьшее целое $a$, при котором уравнение $e^x = ax^2$ имеет три решения.

**Ответ:** ______________ (7 баллов)

**Задача 7.**

На стороне $AD$ параллелограмма $ABCD$ выбрана такая точка $P$, что $BP$ является биссектрисой угла $B$. Вычислите длины сторон параллелограмма, если $BP = CP = 6$ и $PD = 5$.

**Ответ:** ______________ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

**Тезисное доказательство:**

**Задача 8.**

В клетках таблицы $1000 \times 1000$ записаны числа по следующему правилу: в левом столбце числа сверху вниз образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью 3 и первым числом 6 (т.е. $6, 9, 12, \ldots$). В первой (верхней) строке числа также образуют возрастающую слева направо арифметическую прогрессию с первым членом 6 и разностью 3. Во второй строке стоит возрастающая арифметическая прогрессия с первым членом 9 и разностью 5. В общем случае в $i$-ой сверху строке стоит возрастающая слева направо арифметическая прогрессия с разностью $2i + 1$. Найдите какое количество раз в этой таблице встречается число 362.

**Ответ:** ______________ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

**Тезисное доказательство:**

**Задача 9.**

Охотник Иван пришёл на болото охотится на уток. Болото имеет форму квадрата $222 \times 222$ метра и на карте поделено на секторы размером $1 \times 1$ метр. Рассадка уток считается удачной, если в каждой полосе из 222 секторов (то есть $1 \times 222$ или $222 \times 1$ секторов согласно карте) сидят хотя бы две утки. Рассадка считается минимально удачной, если она удачная, но после того, как взлетит любая из уток, эта рассадка перестаёт быть удачной. Считая, что утки на болоте всегда рассаживаются не более чем по одной в секторе, найдите наибольшее количество уток, которое может составлять минимально удачную рассадку.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести **полное решение:**

**Задача 10.**

Найдите все тройки натуральных чисел $x, y$ и $n$, для которых $\frac{x!+y!}{n!} = 5 \cdot 3^{n-1}$.
*Комментарий:* восклицательный знак обозначет факториал натурального числа, то есть $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$. (16 баллов)

В этой задаче требуется привести **полное решение:**