



Высшая проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 9 класса

2022/2023 уч. г.



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

Задача 9.1. (15 баллов) Петя выписал на доску все натуральные делители числа N в порядке возрастания: начал он числом 1, а закончил числом N . Оказалось, что второй по счёту делитель в 3 раза меньше предпоследнего. Чему может быть равно число N ?

Задача 9.2. (15 баллов) Аня, Маша и Таня ели конфеты из подарочного набора. В какой-то момент оказалось, что:

- если все оставшиеся конфеты съест Таня, то она суммарно съест половину всех конфет набора;
- если все оставшиеся конфеты напололам съедят Аня и Маша, то Маша суммарно съест половину всех конфет набора.

Во сколько раз увеличится количество конфет, съеденных Аней, если все оставшиеся конфеты съест она?

Задача 9.3. (15 баллов) На клетчатой доске размером 10×10 закрашены 10 клеток. При каком наибольшем целом P на этой доске гарантированно найдётся клетчатый прямоугольник без закрашенных клеток с периметром не меньше P ? (Стороны прямоугольника должны идти по линиям сетки.)

Задача 9.4. (15 баллов) На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC отмечены точки X , Y , Z соответственно. Известно, что $YX = YB$ и $YZ = YC$. Докажите, что биссектриса угла XYZ проходит через центр описанной окружности треугольника AXZ .

Задача 9.5. (20 баллов) Дано n -значное простое число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ (a_1 — его первая цифра, a_2 — вторая цифра, ..., a_n — последняя цифра), где $n > 10$. Может ли многочлен

$$P(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

иметь $n - 1$ целый корень с учётом кратности?

Задача 9.6. (20 баллов) У царя Салтана при дворе есть 1000 мудрецов. Он знает, что некоторые из них всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут (известно, что есть мудрецы обоих типов). Царь Салтан хочет узнать, сколько всего лжецов среди его мудрецов.

Раз в день он собирает у себя группу мудрецов и спрашивает каждого, сколько в этой группе лжецов. За какое наименьшее количество дней царь Салтан сможет гарантированно определить общее количество лжецов?