



**Высшая  
проба**  
ВСЕРОССИЙСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

**ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА**

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»  
по профилю «Математика» для 11 класса

2022/2023 уч. г.



**ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

**Задача 11.1.** (15 баллов) Коля расставил в вершинах куба действительные числа и сообщил Грише сумму чисел на каждой диагонали каждой грани. Всегда ли Гриша сможет однозначно восстановить число в каждой вершине?

**Задача 11.2.** (15 баллов) Каждая клетка таблицы  $10 \times 10$  покрашена либо в чёрный, либо в белый цвет. За одну операцию разрешается выбрать любой квадрат  $2 \times 2$  и поменять цвета всех четырёх клеток в нём на противоположные.

Назовём раскраску таблицы *красивой*, если за несколько таких операций все её клетки можно сделать белыми. Докажите, что раскраска таблицы является красивой тогда и только тогда, когда в каждом её столбце и в каждой её строке чётное количество чёрных клеток.

**Задача 11.3.** (15 баллов) В равнобедренном треугольнике  $ABC$  равны стороны  $AB$  и  $BC$ . Окружность  $\omega$  касается прямой  $BC$  в точке  $C$  и пересекает прямую  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle ACP = \angle ACQ$ .

**Задача 11.4.** (15 баллов) У многочлена  $P(x)$  степени 2022 нет действительных корней. Его старший коэффициент равен 1, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо  $-1$ . Какое наибольшее количество отрицательных коэффициентов у него может быть?

**Задача 11.5.** (20 баллов) При каких натуральных  $n$  число  $n \cdot 2^{n+1} + 1$  является точным квадратом?

**Задача 11.6.** (20 баллов) В стране 100 городов и 200 дорог; каждая дорога соединяет два города, причём каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Докажите, что найдутся два различных циклических маршрута одинаковой длины.

(Длина циклического маршрута — это количество дорог в нём. В каждом циклическом маршруте каждый город должен участвовать не более одного раза. Циклические маршруты различны, если существует хотя бы одна дорога, содержащаяся в одном из них и не содержащаяся в другом.)