

Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников “Высшая лига”  
по направлению «Математика»

Треки:

«Математика»

«Математика и математическая физика»

Время выполнения задания — 210 минут

*Стоимость каждой задачи указана возле задачи. При подведении итогов по направлению учитываются шесть лучших задач из восьми, при подведении по треку – шесть задач: четыре из основной части и две из выбранного трека. Суммарно можно набрать не более 100 баллов. Если сумма баллов за задачи больше 100 баллов, то результат приравнивается к 100 баллам.*

**ОБЩАЯ (ИНВАРИАНТНАЯ) ЧАСТЬ**

1. [20 баллов] Найдите 2022 производную от функции

$$\frac{x^6 - 4x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 8}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

2. [20 баллов] Между пунктами А и Б расстояние 50 км. В случайное время между 12.00 и 13.00 из пункта А в пункт Б по прямой отправляется поезд со скоростью 50 км/ч. Независимо от него, тоже в случайное время между 12.00 и 13.00 из пункта Б в пункт А по прямой отправляется поезд со скоростью 100 км/ч. Найдите математическое ожидание расстояния от их встречи до пункта А.

3. [20 баллов] Вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} \left( 1 - x \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right) dx$$

4. [20 баллов] На плоскости нарисовано 2022 непересекающиеся, но возможно касающиеся, окружности. Каково максимально возможное число точек касания?

## СПЕЦИАЛЬНАЯ (ВАРИАТИВНАЯ) ЧАСТЬ

### Трек «Математика»

1. **[30 баллов]** Найдите число неединичных  $3 \times 3$ -матриц с коэффициентами в поле из 4 элементов, квадрат которых равен единичной матрице.
2. **[30 баллов]** Найдите все комплексно-аналитические функции на  $\mathbb{C}$ , которые переводят любую окружность с центром в нуле в окружность с центром в нуле.

### Трек «Математика и математическая физика»

1. **[30 баллов]** Цилиндрическая труба радиуса  $R$  неподвижно закреплена в горизонтальном положении (ось симметрии трубы — горизонтальна). Однородная тонкостенная труба радиуса  $r < R$  и массы  $m$  движется без проскальзывания по внутренней поверхности закрепленной трубы так, что оси симметрии труб параллельны в любой момент времени. Система находится в вертикальном однородном поле тяжести с ускорением свободного падения  $\vec{g}$ .
  - а) Выбрав обобщенные координаты, напишите Лагранжиан этой системы и ее уравнения движения.
  - б) Определите частоту малых колебаний подвижной трубы вблизи положения устойчивого равновесия.
2. **[30 баллов]** Точечный заряд  $q > 0$  массы  $m$  движется по круговой орбите радиуса  $R$  вокруг неподвижно закрепленного точечного заряда  $-Q < 0$ . Оцените в дипольном приближении электромагнитного излучения относительное уменьшение радиуса орбиты подвижного заряда  $\Delta R/R$  за время одного оборота вокруг заряда  $Q$ , считая потери энергии за период обращения малыми по сравнению с полной энергией системы. Скорость движения заряда  $q$  пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света  $c$ .