Решения задач олимпиады "Высшая лига" по направлению "Математика"

Задача 1

Задача 1. *Найдите 2022 производную от функции*

$$\frac{x^6 - 4x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 8}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Решение. Нам дана дробь $f(x) = \frac{x^6-4x^4-2x^3-8x^2+2x+8}{x^4-5x^2+4}$. Сначала поделим с остатком:

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{-2x^3 - 7x^2 + 2x + 4}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Обозначим последнюю дробь через $g(x)$. Тогда $f^{(2022)}(x) = (x^2+1)^{(2022)} + g^{(2022)}(x)$. Теперь мы разложим $g(x)$ на простые дроби:

$$g(x) = \frac{-2x^3 - 7x^2 + 2x + 4}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2},$$

где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Домножая на соответствующий знаменатель и подставляя $x = 1, -1, 2, -2$, получаем, что

$$A = g(x)(x-1)|_{x=1}, B = g(x)(x+1)|_{x=-1}, C = g(x)(x-2)|_{x=2}, D = g(x)(x+2)|_{x=-2}.$$

После вычислений, мы видим, что $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -3$, $D = 1$. Итого:

$$g(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - 3\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}.$$

Вспомним, что $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$ и получим, что

$$f^{(2022)}(x) = 2022! \left(\frac{1}{2(x-1)^{2023}} - \frac{1}{2(x+1)^{2023}} - 3\frac{1}{(x-2)^{2023}} + \frac{1}{(x+2)^{2023}} \right).$$

□

Задача 2

Задача 2. *Между пунктами А и Б расстояние 50 км. В случайное время между 12.00 и 13.00 из пункта А в пункт Б по прямой отправляется поезд со скоростью 50 км/ч. Независимо от него, тоже в случайное время между 12.00 и 13.00 из пункта Б в пункт А по прямой отправляется поезд со скоростью 100 км/ч. Найдите математическое ожидание расстояния от их встречи до пункта А.*

Решение. Пусть t_1 и t_2 – время отправления поездов из пунктов А и Б соответственно, отстчитываемое в часах от 12.00 (то есть $t_1,\ t_2 \in [0;1]$). Тогда t_1 и t_2 – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0;1]$.

Обозначим через S расстояние от места встречи поездов до пункта А. Найдём зависимость S от t_1 и t_2. Возможны два варианта.

1. При $t_1 - t_2 \geq \frac{1}{2}$ поезд из пункта А не успевает выехать, так как поезд из пункта Б проезжает за полчаса 50 км. Поэтому $S = 0$.

2. При $t_1 - t_2 < \frac{1}{2}$ поезда встречаются в некоторой точке отрезка [А;Б] отличной от А. Обозначим через t время встречи, отсчитываемое в часах от 12.00. Его можно найти из выражения $50(t-t_1)+100(t-t_2) = 50$. Тогда $S = 50(t-t_1) = \frac{50}{3} + \frac{100}{3}(t_2 - t_1)$.

Таким образом,

$$S = \begin{cases} \frac{50}{3} + \frac{100}{3}(t_2 - t_1), & -\frac{1}{2} < t_2 - t_1 \leq 1; \\ 0, & -1 \leq t_2 - t_1 \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вычислим плотность распределения случайной величины $t_2 - t_1$.

$$p_{t_2-t_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t_2}(y)p_{t_1}(x+y)dy = |[0;1]\cap[-x;1-x]| = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$E(S) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \Big(\frac{50}{3}+\frac{100}{3}\cdot\tau\Big)(1-|\tau|)d\tau = \frac{50}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+2\tau)(1+\tau)d\tau+\frac{50}{3}\int_0^1(1+2\tau)(1-\tau)d\tau.$$

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+2\tau)(1+\tau)d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+3\tau+2\tau^2)d\tau = \Big(\tau+\frac{3\tau^2}{2}+\frac{2\tau^3}{3}\Big)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{12} = \frac{5}{24}.$$

$$I_2 = \int_0^1(1+2\tau)(1-\tau)d\tau = \int_0^1(1+\tau-2\tau^2)d\tau = (\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{2\tau^3}{3})\Big|_0^1 = 1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Отсюда

$$E(S) = \frac{50}{3}(\frac{5}{24}+\frac{5}{6}) = \frac{50}{3}\cdot\frac{25}{24} = \frac{625}{36}.$$

□

Задача 3

Задача 3. *Вычислите интеграл*

$$\int_0^\infty \left(1 - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$$

Решение. Сделаем замену $y = \frac{1}{x}$:

$$I = \int_0^\infty \left(1 - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2} - \frac{sin(y)}{y^3}\right) dy$$

Проинтегрируем по частям взяв в качестве $u = y - sin(y)$, а в качестве $dv = \frac{1}{y^3}$:

$$I = \frac{sin(y) - y}{2y^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1 - cos(y)}{2y^2} dy$$

Второе слагаемое снова интегрируем по частям, получая в итоге

$$\frac{sin(y) - y}{2y^2}\Big|_0^\infty + \frac{cos(y) - 1}{2y}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{sin(y)}{2y} dy$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty \frac{sin(y)}{2y} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Теперь

$$\frac{sin(y) - y}{2y^2} = \frac{1}{2y}\left(\frac{sin(y)}{y} - 1\right)$$

При стремлении y к бесконечности очевидно получаем в пределе 0, при стремлении к нулю – тоже, например, по правилу Лопиталя. Аналогично, $\frac{cos(y)-1}{2y}\Big|_0^\infty = 0$. Отсюда $I = \frac{\pi}{4}$. □

Задача 4

Задача 4. *На плоскости нарисовано 2022 непересекающиеся, но возможно касающиеся окружности. Каково максимально возможное число точек касания?*

Решение. Пусть на плоскости нарисовано N непересекающихся, но возможно касающихся окружностей. Рассмотрим два случая:

1. окружности касаются только внешним образом (то есть любые две касающиеся окружности лежат по разные стороны от общей касательной, проведённой в точке касания);

2. есть окружности, которые касаются внутренним образом (то есть лежат по одну сторону от общей касательной, проведённой в точке касания).

В первом случае каждой такой совокупности из N окружностей сопоставим граф Γ на N вершинах следующим образом. Вершины – центры окружностей, рёбра – касания соответствующих окружностей. Тогда легко видеть, что Γ – планарный граф. Оценим количество реёр графа. Для связного планарного графа справедлива формула Эйлера: $V - E + F = 2$, где V – количество вершин, E – количество рёбер, F – количество двумерных граней, включая внешнюю. Каждое ребро такого графа содержится ровно в двух двумерных гранях, поэтому в случае, когда все двумерные грани – треугольники, мы получим равенство $3F = 2E$, а в общем случае неравенство $3F \le 2E$. Тогда $3(2-V+E) \le 2E$, то есть $E \le 3V-6$. В нашем случае $V = N$, поэтому оценка приобретает вид: $E \le 3N-6$. Очевидным образом полученная оценка верна также в случае несвязного графа Γ.

Во втором случае оценку можно доказать по индукции. Рассмотрим функцию натурального аргумента $T(N) =$ *наибольшее число точек касания N непересекающихся окружностей на плоскости.* Напомним, что среди N касаний теперь есть по крайней мере одно внутреннее.

Утверждение. Если $N \ge 3$, то $T(N) \le 3N-6$.

Доказательство. База индукции: при $N = 3$, $T(N) = 3 = 3 \cdot 3 - 6$.

Шаг индукции: Найдём такую окружность ω, что у неё есть хотя бы одно внутреннее касание, но все окружности, которые располагаются внутри ω, если и касаются друг друга, то только внешним образом. Пусть внутри ω находится k окружностей, тогда снаружи находится $(N-k-1)$.

- Если $k \ge 2$ и $N-k-1 \ge 2$, тогда $T(N) \le T(k+1) + T(N-k) \le 3(k+1) - 6 + 3(N-k) - 6 = 3N-9$.

- Если $k = 1$ и $N-2 \ge 2$ (ω внутренним образом касается с единственной окружностью, а остальные $N-2$ располагаются снаружи), то $T(N) \le T(N-1) + 1 \le 3(N-1) - 6 + 1 = 3N-8$.

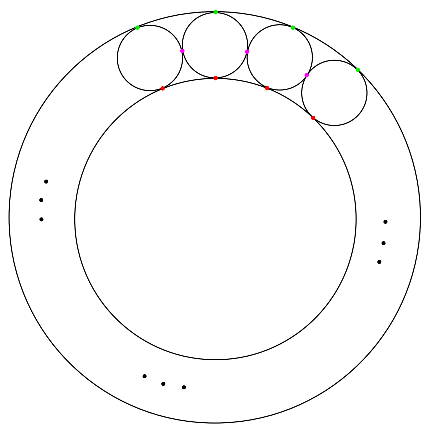
- Если $k = 1$ и $N-2 = 1$, то $T(3) = 2 \le 3 \cdot 3 - 6 = 3$.

- Если $k = N-2 \ge 2$ (снаружи ω располагается ровно 1 окружность, а внутри не меньше двух), то $T(N) \le T(N-1) + 1 \le 3N-8$.

- Если $k = N-1$ (все окружности находятся внутри ω), то, в силу выбора ω, внутри неё располагается совокупность $(N-1)$ непересекающихся окружностей, которые могут касаться только внешним образом. Для этой совокупности окружностей, согласно случаю (1), мы можем посторить обыкновенный плоский граф Γ на $(N-1)$ вершине. Дополним граф Γ вершиной v_ω, соответствующей окружности ω, и n рёбрами, соответствующими касаниям ω с окружностями $\mu_1, \ldots, \mu_n$, следующим образом. Вершину v_ω возьмём вне плоскости графа Γ, рёбра начнём радиусами окружностей $\mu_1, \ldots, \mu_n$, проведёнными в точки касания, и продолжим отрезками, соединяющими точки касания с вершиной v_ω. Полученный граф Γ' является планарным. Значит в этом случае также справедлива оценка и $T(N) \leq 3N - 6$.

$\square$

Таким образом, в случае, когда на плоскости нарисовано 2022 окружности, максимально возможное число точек касания равно $3 \cdot 2022 - 6 = 6060$. В качестве примера можно расмотреть две концентрические окружности, между которыми "кольцом" вписаны 2020 окружностей, см. рисунок ниже.



$\square$

Задача M1

Задача 5. *Найдите число неединичных 3×3-матриц с коэффициентами в поле из 4 элементов, квадрат которых равен единичной матрице.*

Решение. Из условия следует, что все собственные значения у искомой матрицы – единицы, так как любое собственное это корень уравнения $\lambda^2 = 1$, у которого в поле из четырёх элементов ровно одно значение решение. Следовательно, любая матрица, квадрат которой равен единице, имеет Жорданову форму над $\mathbb{F}_4$. Возможные Жордановы формы:

1) $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Вариант 2) не подходит, так как $J_2^2 \neq 1$. Вариант 3) не подходит, так как по условию матрица неединичная. Таким образом, матрица либо единичная, либо подобна матрице J_1, то есть имеет вид CJ_1C^{-1} для некоторой матрицы $C \in GL_3(\mathbb{F}_4)$. Легко видет, что количество матриц с Жордановой формой J_1 равно $|GL_3(\mathbb{F}_4)|/k$, где k – количество элеметнов в централизаторе матрицы J_1, то есть таких C, что $CJ_1 = J_1C$. Действительно, на множестве матриц вида CJ_1C^{-1} транзитивно действует группа $GL_3(\mathbb{F}_4)$ сопряжениями и мощность орбиты, то есть количество матриц с данной жордановой формой равно индексу стабилизатора, то есть числу $|GL_3(\mathbb{F}_4)|/k$.

Количество элементов в $GL_3(\mathbb{F}_4)$ равно $(4^3-1)(4^3-4)(4^3-4^2)$. Посчитаем количество элементов в централизаторе матрицы J_1: если $CAC^{-1} = A$, то есть $CA = AC$ и

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Таким образом

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,1}+c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,1}+c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,1}+c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1}+c_{2,1} & c_{1,2}+c_{2,2} & c_{1,3}+c_{2,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}.$$

$$c_{2,1} = c_{2,3} = c_{3,1} = 0$$

$$c_{1,1} = c_{2,2}$$

Таким образом, матрицы из централизатора имеют вид

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ 0 & c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}$$

Заметим, что определитель такой матрицы равен $c_{1,1} \cdot c_{2,2} \cdot c_{3,3}$. Таким образом элементы на диагонали – ненулевые, а вне диагонали – произвольные. Отсюда $k = 4^3 \cdot 3^2$, и количество матриц с жордановой формой J_1 равно $\frac{63 \cdot (16-1) \cdot (4-1)}{3^2} = 21 \cdot 15 = 315$.

□

Задача M2

Задача 6. *Найдите все комплексно-аналитические функции на $\mathbb{C}$, которые переводят любую окружность с центром в нуле в окружность с центром в нуле.*

Решение. Легко видеть, что $f(0) = 0$, так как иначе окружности малого радиуса не переходят в окружности с Обозначим через k порядок нуля в точке 0. Более того, других корней у f нет. Тогда функция

$$g(z) = \frac{f}{z^k}$$

аналитическая функция, у котрой нулей нет. Более того, функция $g(z)$ отображает окружности с центром в нуле в некотрые части окружностей с цетром в нуле. Обозначим через $h(r)$ радиус окружности, подмножеством которой является образ окружности с центром в нуле и радиуса r. По принципу максимума максимум модуля достигается на границе, откуда следует, что функция $h(r)$ монотонна. Так как $g(0) \neq 0$ отсюда следует, что функция $\frac{1}{g}$ – ограничена и аналитична и, следовательно, константа. Таким образом $f(z) = C \cdot z^k, C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z}_{>0}$. □

Задача Ф1

Задача 7. *Цилиндрическая труба радиуса R неподвижно закреплена в горизонтальном положении (ось симметрии трубы — горизонтальна). Однородная тонкостенная труба радиуса $r < R$ и массы m движется без проскальзывания по внутренней поверхности закрепленной трубы так, что оси симметрии труб параллельны в любой момент времени. Система находится в вертикальном однородном поле тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$.*

а) Выбрав обобщенные координаты, напишите Лагранжиан этой системы и ее уравнения движения.

б) Определите частоту малых колебаний подвижной трубы вблизи положения устойчивого равновесия.

Решение. **а)** Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол ϕ между вертикальной прямой и отрезком, соединяющим центры подвижной и неподвижной труб. Нулевое значение обобщенной координаты выберем в положении равновесия, когда точка касания совпадает с нижней точкой неподвижной трубы. В силу отсутствия проскальзывания, поворот центра подвижной трубы на угол ϕ сопровождается поворотом самой этой трубы на угол $\theta = \phi R/r$ относительно прямой направленной из центра неподвижной трубы в (переменную) точку касания.

Кинетическую энергию подвижной трубы представим в виде энергии движения центра масс и энергии вращения трубы в системе центра масс. Но так как в этой сумме энергия вращения должна вычисляться в *поступательно* движущейся системе отсчета, связанной с центром масс, то угловая скорость вращения определяется не углом θ, а разностью

$$\psi = \theta - \phi = \phi(R - r)/r.$$

Таким образом, кинетическая энергия трубы:

$$T = T_{\text{ц.м.}} + T_{\text{отн.}} = \frac{m(R-r)^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\psi}^2}{2} = m(R-r)^2\dot{\phi}^2.$$

Потенциальная энергия с точностью до несущественной константы, фиксирующей нулевую точку энергии, дается выражением:

$$U(\phi) = -mg(R-r)\cos\phi.$$

Итак, Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = T - U = m(R-r)^2\dot{\phi}^2 + mg(R-r)\cos\phi.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа (уравнение движения системы):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(R-r)\ddot{\phi} + g\sin\phi = 0.$$

б) Если подвижная труба совершает малые колебания в районе точки равновесия $\phi = 0$, то в уравнении движения можно разложить функцию $\sin\phi$ до первого порядка по угловой переменной и получить приближенное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{2(R-r)}\,\phi = 0,$$

что дает для угловой частоты колебаний ω следующий ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}\,.$$

□

Задача Ф2

Задача 8. *Точечный заряд $q > 0$ массы m движется по круговой орбите радиуса R вокруг неподвижно закрепленного точечного заряда $-Q < 0$. Оцените в дипольном приближении электромагнитного излучения относительное уменьшение радиуса орбиты подвижного заряда $\Delta R/R$ за время одного оборота вокруг заряда Q, считая потери энергии за период обращения малыми по сравнению с полной энергией системы. Скорость движения заряда q пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света c.*

Решение. При ускоренном движении по круговой орбите заряженная частица будет излучать электромагнитные волны. Учитывая сделанные в условии допущения о малости потерь энергии за период и малости скорости заряда по сравнению со скоростью света, оценим потери энергии в дипольном приближении для мгновенной мощности излучения:

$$W(t) = \frac{2}{3c^3}\,|\ddot{\vec{d}}|^2,$$

где $\vec{d}$ — дипольный момент системы. Пренебрегая изменением радиуса орбиты и скорости заряда за период, получим в этом приближении, что дипольный момент представляется равномерно вращающимся вектором постоянной длины:

$$\vec{d}(t) = q\,\vec{r}_q(t) = q(R\cos\omega t, R\sin\omega t),$$

где мы используем декартовы координаты в плоскости движения заряда q, начало системы отсчета помещено в точку расположения неподвижного заряда $-Q$.

Угловую скорость вращения ω найдем из классического уравнения Ньютона для движения по окружности под действием Кулоновской силы:

$$mR\omega^2 = |\vec{F}_{\text{кул.}}| = \frac{q\,Q}{R^2}, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{q\,Q}{mR}}\,.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для W получаем следующее:

$$W = \frac{2}{3}\,\frac{q^4Q^2}{m^2R^4c^3} = \text{const}.$$

В силу постоянства мощности излучения, энергия, излученная за период, равна:

$$\Delta E_{\text{изл.}} = W\,\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{q\,Q}{mc^2R}\right)^{3/2}\frac{q^2}{R}.$$

Полная энергия системы двух зарядов:

$$E = \frac{m\omega^2R^2}{2} - \frac{q\,Q}{R} = -\frac{q\,Q}{2R}.$$

Отсюда получаем связь потери энергии и изменения радиуса орбиты:

$$\Delta E = E(R-\Delta R) - E(R) \simeq -\frac{q\,Q}{2R^2}\,\Delta R \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta E}{E}.$$

И, наконец, учитывая связь потери энергии в системе и излученной энергии $\Delta E = -\Delta E_{\text{изл.}}$, получаем ответ на вопрос задачи:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{8\pi}{3}\sqrt{\frac{q\,Q}{mc^2R}}\,\frac{q^2}{mc^2R}.$$

□