

### 1 тур олимпиады

1. Найдите ранг оператора на векторном пространстве вещественных  $3 \times 3$  матриц, переводящего матрицу  $X$  в  $AX - XA$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Ответ: 4**

2. Найдите минимальное возможное расстояние между двумя точками на вещественной плоскости, одна из которых лежит на прямой  $3x + 4y = 60$ , а другая — на гиперболе  $xy = 300$ .

**Ответ: 12**

3. Найдите число подгрупп из 4 элементов в прямом произведении групп перестановок  $S_2 \times S_4$ .

**Ответ: 31**

4. Найдите максимальную размерность подпространства решений уравнения

$$(\partial^2 - 1)^2(\partial^2 - 2)^2(\partial^2 - 4)^2 f = 0,$$

состоящего из периодических функций, где  $\partial$  — оператор дифференцирования, а  $f$  — вещественнозначная функция одного переменного.

**Ответ: 0**

5. Кузнечик прыгает по точкам  $A, B, C$ . Находясь в  $A$  или  $C$ , кузнечик прыгает в  $B$ . Находясь в  $B$ , кузнечик прыгает в  $A$  с вероятностью  $2/3$ , а в  $C$  с вероятностью  $1/3$ . Пусть изначально кузнечик находится в точке  $A$ . Найдите математическое ожидания числа прыжков до первого возвращения в точку  $A$ .

**Ответ: 3**

6. В трехмерном пространстве дана сфера, точка и плоскость. Найдите максимально возможное число связных компонент точек на плоскости таких, что прямая соединяющая ее с данной точкой касается данной сферы.

**Ответ: 2**

7. Найдите максимальное число  $x$  такое, что последовательность матриц

$$\begin{pmatrix} -6+x & -4 \\ 3 & 1+x \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ограничена.

**Ответ: 3**

8. Найдите число элементов  $a \in \mathbb{F}_{83}$  в поле из 83 элемента, для которых многочлен  $t^2 + 5t + a \in \mathbb{F}_{83}[t]$  неприводим.

**Ответ: 42**

9. В четырехмерном пространстве даны 5 точек  $A(0, 0, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 0, 3)$ ,  $C(2, 2, 0, 3)$ ,  $D(0, 2, 2, 2)$  и  $E(1, 0, 1, 4)$ . Найдите четырехмерный объем тела, состоящего из точек отрезков один конец которых принадлежит отрезку  $AB$ , а другой конец — треугольнику  $CDE$ .

**Ответ: 1**

10. Сколько существует целых чисел  $k$  таких, что последовательность

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2}k^2 - 3k + \frac{1}{2})^n}{n}$$

сходится?

**Ответ: 3**