Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 7 класс. Решения задач

весна 2023 г.

7 класс

Задача 7.1. *(15 баллов)* Найдите наименьшее десятизначное натуральное число, все цифры которого различны, такое, что при вычёркивании всех чётных цифр остаётся 97531, а при вычёркивании всех нечётных цифр — 02468.

Ответ: 9024675318.

Решение. Обозначим $A = 9024675318$. Рассмотрим произвольное число $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$, удовлетворяющее условиям задачи. Ясно, что $a_1 = 9$, поскольку $a_1 \neq 0$. Пусть $7 = a_k$ для некоторого k. Разберём несколько случаев.

- Если $k > 6$, то $N = 9024687531 > A$.
- Если $k < 6$, то $N = \overline{9\ldots7\ldots a_6\ldots a_{10}} > A$.
- Если $k = 6$, то $N = \overline{902467a_7 a_8 a_9 a_{10}}$. Если $a_{10} \neq 8$, то $N = \overline{902467\ldots8\ldots a_{10}} > A$. Если же $a_{10} = 8$, то $N = 9024675318 = A$.

Итак, мы разобрали все возможные случаи и убедились, что A — наименьшее число. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён верный ответ с обоснованием минимальности.

8 б. Приведён верный ответ без обоснования минимальности.

Задача 7.2. *(15 баллов)* Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На сторонах AB, BC, AC отметили точки K, L, M соответственно так, что $\angle AKM = 90°$, $\angle BLK = 90°$ и $KM = KL$. Чему равен угол CML?

Ответ: 90°.

Решение. Из условия следует, что $\angle MKL + \angle LKB = 90° = \angle LKB + \angle LBK$, откуда $\angle MKL = \angle LBK$ (рис. 1). Треугольники ABC и MKL — равнобедренные с равными углами при вершине, поэтому и углы при основании у них тоже равны: $\angle KLM = \angle MCL$. Осталось заметить, что $90° = \angle KLM + \angle CLM = \angle MCL + \angle CLM$, поэтому $\angle CML = 180° - \angle MCL - \angle CLM = 90°$. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Доказано подобие (т. е. равенство соответствующих углов) треугольников ABC и MKL.

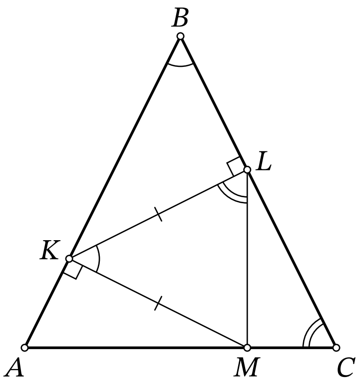

Рис. 1: к решению задачи 7.2.

8 б. Задача решена с использованием подобия треугольников ABC и MKL, но само их подобие не доказано.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 7.3. *(15 баллов)* На складе стоят несколько ящиков. Известно, что ящиков не более 60, и в каждом из них находятся либо 59 яблок, либо 60 апельсинов. После того, как на склад принесли коробку с некоторым количеством апельсинов, фруктов на складе стало поровну. Какое наименьшее количество апельсинов могло быть в принесённой коробке?

Ответ: 30.

Решение. Обозначим количество ящиков с апельсинами через n, количество ящиков с яблоками — через m, а количество апельсинов в принесённом ящике — через x. По условию $59m = 60n + x$. Перенеся $59n$ влево, получим $59(m - n) = n + x$. Отсюда следует, что $n + x$ — натуральное число, кратное 59, поэтому оно не меньше 59. Также, поскольку обе части равенства положительны, получаем $m > n$.

Если $x \leqslant 29$, то $n \geqslant 30$ и $m \geqslant 31$, что противоречит условию $n + m \leqslant 60$. Значит, $x \geqslant 30$.

Осталось заметить, что при $m = 30$, $n = 29$ и $x = 30$ условие задачи выполняется, то есть в принесённой коробке могло быть ровно 30 апельсинов. □

Другое решение. Рассмотрим ситуацию с наименьшим возможным количеством апельсинов в коробке. Заметим, что ящиков с яблоками должно быть больше, чем ящиков с апельсинами (иначе в ящиках яблок уже меньше, чем апельсинов, и принесенная коробка с апельсинами не сможет уравнять количество фруктов). Обозначим количество ящиков с апельсинами через n; тогда $n \leqslant 29$, иначе общее количество ящиков превысит 60.

Докажем, что ящиков с яблоками ровно на 1 больше, чем ящиков с апельсинами. Действительно, в ином случае ящиков с яблоками не менее $n+2$. Получается, яблок в ящиках больше, чем апельсинов, хотя бы на

$$59(n+2)-60n=118-n.$$

Так как $n \leqslant 29$, то эта разность не меньше 89. Но тогда один ящик с яблоками можно убрать, а количество апельсинов в принесенной коробке уменьшить на 59. Значит, рассматриваемый случай не дает минимального количества апельсинов в коробке, противоречие.

Тогда разность между количествами яблок и апельсинов в ящиках равна

$$59(n+1)-60n=59-n.$$

Она уменьшается с увеличением n, то есть наименьшее значение разности достигается при наибольшем значении n. Отсюда ясно, что эта разность (равная количеству апельсинов в коробке) достигает наименьшего значения, равного 30, при наибольшем значении $n=29$ (всего ящиков тогда ровно 59). □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

12 б. *Оценка* — доказано, что в коробке не менее 30 апельсинов.

Альтернативно (если указанные выше критерии не применимы, либо дают меньше баллов), суммируются следующие продвижения:

+8 б. Доказывается, что для достижения минимальной разности между количеством яблок и количеством апельсинов необходимо, чтобы коробок с яблоками было ровно на одну больше.

В отсутствие доказательства этого факта используется следующий критерий:

+6 б. Этот факт утверждается без доказательства.

+7 б. Разобраны при всех $n<30$ случаи, когда ящиков с яблоками $n+1$, а с апельсинами — n. (Например, может быть просто отмечено, что при увеличении n на 1 разность $59(n+1)-60n=59-n$ уменьшается на 1.)

В отсутствие полного разбора этих случаев используется следующий критерий:

+3 б. *Пример* — указана ситуация, в которой апельсинов в коробке ровно 30 (либо иным способом доказано, что такая ситуация возможна).

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён верный ответ.

Задача 7.4. *(15 баллов)* На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 100 жителей этого острова выстроились в ряд, и каждый из них сказал одну из следующих фраз:

- «Слева от меня лжецов столько же, сколько и рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 1 больше, чем рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 2 больше, чем рыцарей.»

  …

- «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей.»

Известно, что каждую фразу сказал ровно один человек. Какое наименьшее количество лжецов может быть среди этих 100 жителей?

Ответ: 50.

Решение. Предположим, что рыцарей в ряду не менее 51. Рассмотрим самого правого из них. Слева от него хотя бы 50 рыцарей и не более 49 лжецов, поэтому он не мог сказать ни одну из перечисленных фраз, противоречие. Значит, всего рыцарей не больше 50.

Теперь приведём пример, когда рыцарей ровно 50. Пусть левые 50 человек — лжецы, которые соответственно говорят фразы «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей», «Слева от меня лжецов на 98 больше, чем рыцарей», …, «Слева от меня лжецов на 51 больше, чем рыцарей» и «Слева от меня лжецов столько же, сколько и рыцарей». А следующие 50 человек — рыцари, которые говорят соответственно «Слева от меня лжецов на 50 больше, чем рыцарей», «Слева от меня лжецов на 49 больше, чем рыцарей», …, «Слева от меня лжецов на 1 больше, чем рыцарей». Понятно, что фразы лжецов ложны, так как слева от каждого из них не более 49 лжецов. Фраза самого левого рыцаря верна, так как слева от него стоит 50 лжецов и 0 рыцарей. Фразы следующих рыцарей верны, так как для каждого следующего количество лжецов не изменяется, а количество рыцарей увеличивается на 1, т. е. разница между лжецами и рыцарями уменьшается на 1. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+8 б. *Оценка* — доказано, что лжецов не менее 50.

В отсутствие верной оценки оценивается следующее продвижение:

+6 б. Доказано, что если лжецов k, то фразы, начиная с «Слева от меня лжецов на $k+1$ больше, чем рыцарей» и до «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей» ложны.

+7 б. *Пример* — приведена верная расстановка рыцарей и лжецов с указанием сказанных ими фраз (либо иным способом доказано, что такая расстановка существует).

В случае, если не указаны некоторые фразы, но из самой конструкции они очевидны (например, фразы рыцарей), баллы не снижаются.

В отсутствие верного примера используется наибольший подходящий критерий:

+3 б. Приведена подходящая расстановка рыцарей и лжецов без указания сказанных ими фраз.

+5 б. Приведена расстановка ЛЛ…ЛРР…Р, и ошибочно указано, что первый лжец говорит фразу «Слева от меня лжецов столько же, сколько рыцарей».

+6 б. Приведена расстановка ЛЛ…ЛРР…Р, и не указано, какую фразу говорит первый лжец.

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 7.5. *(20 баллов)* Андрей выписал на доску 6 последовательных четырёхзначных чисел в строчку в порядке возрастания. Затем он под каждым из этих чисел написал один из его простых делителей, причём все выписанные простые делители оказались разными. После этого Андрей стёр исходные 6 чисел и пригласил в класс Бориса. Всегда ли Борис, видя выписанные на доску простые делители, сможет однозначно определить исходные числа?

Ответ: всегда.

Решение. Обозначим наименьшее из изначально выписанных Андреем чисел через x. Тогда следующие числа равны $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$ соответственно. Пусть их выписанные простые делители равны p_0, p_1, ..., p_5 соответственно.

Предположим, что Борис не может однозначно восстановить числа Андрея. Это значит, что у него есть как минимум 2 кандидата на роль x. Обозначим другого кандидата через y. Тогда x и y делятся на p_0, откуда $x-y$ делится на p_0. Аналогично $x+1$ и $y+1$ делятся на p_1, откуда $x-y$ делится ещё и на p_1. Продолжая таким образом рассуждения, получим, что $x-y$ делится также и на p_2, p_3, p_4, p_5.

Следовательно, число $x-y$ делится на 6 различных простых чисел, а значит, и на их произведение. Произведение 6 различных простых чисел не меньше, чем $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 = 30030$. Но разность двух различных четырёхзначных чисел не может делиться на 30030, противоречие. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Любое полное решение задачи.

12 б. Утверждается, но не доказывается, что минимальное расстояние между двумя шестёрками чисел, удовлетворяющих условию, составляет хотя бы НОК$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 7.6. *(20 баллов)* На столе по кругу лежат n монет, пронумерованных числами от 0 до $n-1$ в некотором порядке. За одну операцию разрешается взять какую-то монету с номером k и переместить её на k позиций в произвольном направлении, сместив при этом промежуточные монеты (например, операция над монетой с номером 2 может быть выполнена одним из двух способов, показанных на рис. 2). Докажите, что из любого начального положения можно получить такое, в котором, начиная с некоторого места, монеты $0, 1, 2, \ldots, n-1$ лежат по часовой стрелке.

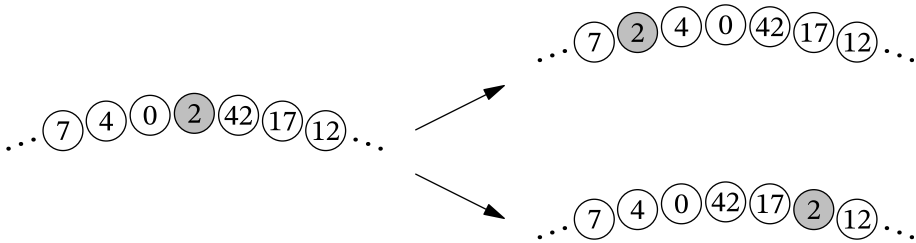

Рис. 2: к условию задачи 7.6

Решение. Покажем, что любую монету, кроме 0 и $n-1$, некоторой последовательностью операций можно поменять местами с соседней монетой, сохранив при этом порядок остальных монет. Рассмотрим монету k, где $1 < k < n-2$. Убедимся, что среди следующих k подряд идущих монет по часовой стрелке нет монеты 1. Если это не так, просто выведем 1 за пределы этой области, обменивая её последовательно с какими-то монетами. Теперь совершим нашей монетой k операцию по часовой стрелке. Далее поставим монету 1 перед монетой k и совершим монетой k операцию против часовой стрелки. В итоге монета k поменяется местами со следующей за ней по часовой стрелке (рис. 3). Положение остальных монет, кроме монеты 1, друг относительно друга не поменяется, поэтому монету 1 можно вернуть на место, на котором она была до этих операций.

Заметим, что теперь мы умеем менять местами любые две соседние монеты, кроме пары $0, n-1$, так как в любой другой паре есть хотя бы одна монета, отличная от 0 и $n-1$. Тогда легко поставить монеты в нужном порядке: поставим после монеты 0 по часовой стрелке монету 1, затем за ней монету 2 и т. д. Когда мы поставим на место монету $n-2$, монета $n-1$ автоматически окажется между монетами $n-2$ и 0, то есть получится требуемая расстановка. □

Другое решение. Рассмотрим некоторый отрезок из k монет (т. е. k последовательно лежащих монет), среди которых нет монеты 0. Определим процедуру «вылупления», в ходе которой будем двигать монеты внутри этого отрезка, и докажем, что по окончании процедуры крайняя правая монета отрезка (первая, если идти против часовой стрелки) будет иметь номер не меньше k.

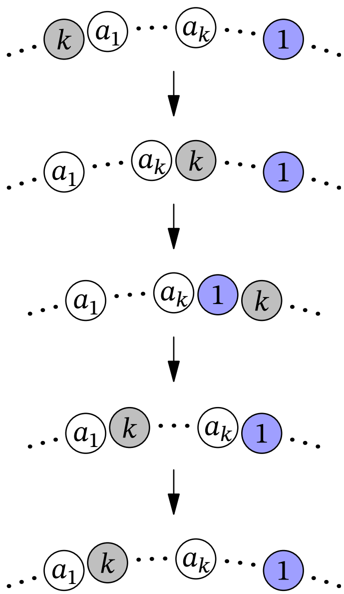

Рис. 3: к решению задачи 7.6.

Процедура «вылупления» состоит в том, чтобы последовательно брать крайнюю правую монету отрезка, и если её номер меньше k, то перемещать её влево с помощью нашей операции. Так как сам отрезок имеет длину k, то перемещаемая монета за его пределы не выйдет. Если номер крайней правой монеты оказывается не меньше k, то процедура заканчивается.

Докажем, что процедура закончится за конечное число шагов. Действительно, предположим, что в ходе процедуры мы сделаем бесконечное число операций. Тогда к некоторым монетам операция должна быть применена бесконечное число раз. Из таких монет выберем монету с наибольшим номером, пусть это m. Каждый раз, когда мы перемещаем монету m влево, справа от неё (в пределах отрезка) оказываются m других монет; ясно, что прежде чем мы опять дойдём до монеты m, мы к ним ко всем применим операцию хотя бы по одному разу. Но хотя бы одна из них имеет номер, больший m. Значит, между каждыми двумя применениями операции к m должно произойти применение операции к монете с номером, большим m. Следовательно, таких операций тоже бесконечное количество; тогда существует монета с номером, большим m, к которой операция применялась бесконечное число раз. Противоречие с выбором номера m.

Теперь, когда процедура «вылупления» определена корректно, с её помощью легко получить требуемое. Рассмотрим монету 0. Все остальные монеты образуют отрезок из $n-1$ монеты. Процедурой «вылупления» добьёмся, чтобы правая из них имела номер $n-1$ (других монет с номером, не меньшим $n-1$, там нет). Теперь все монеты, кроме 0 и $n-1$, образуют отрезок из $n-2$ монет; «вылуплением» добьёмся, чтобы с правого конца стояла монета $n-2$. Аналогично продолжая процесс, будем последовательно получать монеты $n-3$, $n-4$, ... в порядке против часовой стрелки, пока не дойдём до 2 и 1. Это и есть требуемая в условии расстановка. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Любой верный алгоритм с обоснованием.

6 б. Задача сведена к доказательству следующего утверждения: в ряд стоят монеты от 0 до $k+1$, причём монеты от 0 до k расположены в порядке возрастания (а монета $k+1$ в произвольном месте этого ряда). Тогда, применяя к этим монетам операции из условия задачи и не выходя за пределы ряда, их можно расположить в порядке возрастания от 0 до $k+1$.

3 б. Утверждается, но не доказывается или доказывается неверно, что если для некоторого $k < n-1$ удалось расположить подряд монеты от 0 до k, то монеты из промежутка между монетами k и $k+1$ можно удалить так, чтобы ни одна из них не оказалась между какими-то двумя из монет $0, 1, 2, \dots, k$.