Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 10 класс. Решения задач

весна 2023 г.

10 класс

Задача 10.1. *(15 баллов)* Существуют ли многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что многочлены $P(x)\cdot Q(x)$, $Q(x)\cdot R(x)$ и $P(x)\cdot R(x)$ имеют одинаковую степень, а многочлены $P(x)+Q(x)$, $P(x)+R(x)$ и $Q(x)+R(x)$ имеют попарно различные степени? (Считаем, что нулевой многочлен степени не имеет, то есть указанные многочлены не могут быть ему равны.)

Ответ: да.

Решение. Достаточно взять, например, $P(x) = x^2$, $Q(x) = -x^2+1$, $R(x) = x^2+x$. Тогда многочлены $P(x)\cdot Q(x)$, $Q(x)\cdot R(x)$ и $P(x)\cdot R(x)$ имеют степень 4 (это произведения двух многочленов степени 2); многочлен $P(x)+Q(x)$ равен 1 и имеет степень 0; многочлен $P(x)+R(x)$ равен $2x^2+x$ и имеет степень 2; многочлен $Q(x)+R(x)$ равен $x+1$ и имеет степень 1. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён любой верный пример многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ (либо иным образом доказано, что такие многочлены существуют).

0 б. Приведён только ответ.

Задача 10.2. *(15 баллов)* Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$. На стороне CD нашлась точка N такая, что $\angle DNB = 90°$. Докажите, что $AD + NC = DN$.

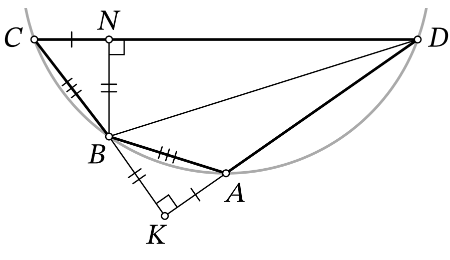

Рис. 1: к решению задачи 10.2.

Решение. На продолжении отрезка DA за точку A отметим точку K такую, что $AK = NC$ (рис. 1). Заметим, что треугольники AKB и CNB равны ($AB = CB$ по условию, $AK = CN$ по построению, $\angle KAD = \angle NCB$ из вписанности четырёхугольника $ABCD$). Следовательно, $BK = BN$ и $\angle BKA = \angle BNC = 90°$.

Теперь заметим, что равны прямоугольные треугольники DBN и DBK (у них равны катеты BN и BK, а гипотенуза BD — общая). Следовательно, $DN = DK = AD + AK = AD + NC$, что и требовалось. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

3 б. Рассмотрена точка K из решения (т. е. точка на продолжении отрезка DA за точку A с условием $AK = CN$), либо та же точка, построенная другим корректным способом (например, как проекция точки B на луч DA).

Задача 10.3. *(15 баллов)* Для действительных чисел $x > 2$ и $y > 2$ докажите, что

$$\frac{x^2-x}{y^2+y}+\frac{y^2-y}{x^2+x}>\frac{2}{3}.$$

Решение. Домножив обе части на произведение знаменателей, получим

$$3(x^4-x^2+y^4-y^2)>2(x^2+x)(y^2+y).$$

Раскрыв скобки в правой части и перенеся отрицательные слагаемые в правую часть, получим

$$3x^4+3y^4>2x^2y^2+2x^2y+2xy^2+2xy+3x^2+3y^2.$$

Это неравенство получается суммированием трёх следующих неравенств, справедливых для любых $x > 2$ и $y > 2$:

- $x^4+y^4 \geqslant 2x^2y^2$. Это неравенство равносильно тому, что $(x^2-y^2)^2 \geqslant 0$.
- $x^4+y^4 = x^2\cdot x^2+y^2\cdot y^2 > 4x^2+4y^2 \geqslant 3x^2+3y^2+2xy$. Последнее неравенство равносильно тому, что $(x-y)^2 \geqslant 0$.
- $x^4+y^4 = x\cdot x^3+y\cdot y^3 > 2x^3+2y^3 \geqslant 2x^2y+2xy^2$. Последнее неравенство равносильно тому, что $2(x+y)(x-y)^2 \geqslant 0$. □

Другое решение. Воспользуемся неравенством Коши для двух чисел (неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим): для положительных p и q верно $p+q \geqslant 2\sqrt{pq}$.

Пусть $p = \frac{x^2-x}{y^2+y}$ и $q = \frac{y^2-y}{x^2+x}$ (p и q положительны в силу того, что $x > 2$ и $y > 2$). Тогда по неравенству Коши получаем

$$\frac{x^2-x}{y^2+y}+\frac{y^2-y}{x^2+x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2+x}\cdot\frac{y^2-y}{y^2+y}} = 2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)} =$$

$$= 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{y+1}\right)} > 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{3}. \qquad \square$$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

5 б. Применено неравенство Коши к двум исходным дробям (как во втором решении).

5 б. Применено транснеравенство к числителям и знаменателям дробей левой части исходного неравенства:

$$\frac{x^2-x}{y^2+y}+\frac{y^2-y}{x^2+x}\geqslant\frac{x^2-x}{x^2+x}+\frac{y^2-y}{y^2+y}.$$

Задача 10.4. *(15 баллов)* Однажды 45 друзей, живущих в разных уголках земного шара, захотели обменяться друг с другом новостями. Для этого они собираются устроить k видеовстреч, на каждой из которых каждый человек расскажет всем свои новости, а также все новости других людей, которые он узнал ранее.

Для видеовстреч было предложено 10 дней, но оказалось, что каждый из друзей может присутствовать только в какие-то 8 из них. При каком наименьшем натуральном k можно гарантированно выбрать k дней для видеовстреч из предложенных 10 так, чтобы каждый узнал новости каждого?

(Между предложенными днями у людей новых новостей не возникает, и никак иначе они друг с другом не общаются. В каждый из предложенных дней проходит одна видеовстреча, на которой собираются все, кто может в этот день присутствовать.)

Ответ: 5 дней.

Решение. Приведём пример ситуации, в которой 4 дней не хватит. Пусть у каждого из 45 людей будет своя, не совпадающая с другими людьми, пара дней, в которые он не может участвовать во встрече. Так как количество способов выбрать пару дней из 10 предложенных равно $C_{10}^2=45$, то для любой пары дней найдётся человек, который не может присутствовать ровно в эту пару дней. Предположим, что мы смогли выбрать какие-то 4 дня так, чтобы каждый узнал все новости. Но тогда существует человек A, который не может присутствовать в первые два дня из этих четырёх, а также человек B, который не может присутствовать в последние два из этих четырёх дней. Заметим, что тогда B не сможет узнать новостей A. Противоречие.

Теперь поймём, что 5 дней всегда точно хватит. Выберем 5 дней произвольным образом. Докажем, что любые два человека будут вместе присутствовать на какой-то встрече. Действительно, среди этих 5 дней есть не более 2 дней, в которые не может присутствовать первый, а также не более 2 дней, в которые не может присутствовать второй. Значит, найдётся день, в который могут присутствовать оба человека. Таким образом, каждая пара людей сможет обменяться новостями, т. е. каждый узнает новость каждого. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+9 б. *Оценка* — доказано, что 4 дней может не хватить.

В отсутствие этого доказательства оценивается следующее продвижение:

+1 б. Упомянуто, что всем людям могут соответствовать разные пары пропущенных дней.

+6 б. *Пример* — доказано, что 5 дней гарантированно хватит.

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён только верный ответ.

Задача 10.5. *(20 баллов)* Найдите все составные натуральные числа n, обладающие следующим свойством: каждый натуральный делитель числа n (в частности, само n), уменьшенный на 1, является квадратом целого числа.

Ответ: 10.

Решение. Предположим, что n делится на квадрат какого-то простого числа p. Тогда у него есть делитель $p^2 = b^2+1$; но два квадрата целых чисел могут отличаться на 1, только если это 0 и 1.

Пусть n делится на какие-то два простых числа p и q. Без ограничения общности можно считать, что $p > q$. Из условия, что любой делитель, уменьшенный на 1, является квадратом, можно записать

$$\begin{aligned} p &= a^2 + 1, \\ q &= b^2 + 1, \\ pq &= c^2 + 1. \end{aligned}$$

Вычтем из третьего уравнения первое, получим $pq - p = c^2 - a^2$. Это можно переписать в виде

$$p(q-1) = (c-a)(c+a).$$

Так как p — простое число, один из множителей в правой части должен делиться на p. Заметим, что из условия $p > q$ следует, что $pq < p^2$, откуда $c < p$. Поэтому $c - a < p$ и, так как $c \neq a$, не может делиться на p. Значит, $c + a$ должно делиться на p. При этом $c < p$ и $a < p$, откуда $c + a$ должно быть в точности равно p.

Итак, получили, что $c = p - a$. Кроме того, так как $p = c + a$, $q - 1$ должно быть равно оставшемуся множителю, т. е. $c - a$. Значит, $q = c - a + 1 = p - 2a + 1$. Отсюда видно, что числа p и q разной чётности. Но так как они оба простые и $p > q$, получаем, что $q = 2$.

Подставляя $q = 2$, получаем $2 = c - a + 1 = p - 2a + 1$, откуда, во-первых, $c = a + 1$, а во-вторых, $p = 2a + 1$. Тогда $pq = 2p = 4a + 2$ и $pq = c^2 + 1 = (a+1)^2 + 1$. Приравнивая, получаем квадратное уравнение $a^2 + 2a + 2 = 4a + 2$, корнями которого являются числа 2 и 0, откуда p равно 5 или 1. Но так как p должно быть простым, то остаётся единственный вариант $p = 5$.

Таким образом, единственный возможный случай — это $p = 5$, $q = 2$. Понятно, что других простых чисел в разложении n уже быть не может. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Приведено любое полное решение задачи.

16 б. Доказано, что n чётно.

4 б. Верно разобран случай чётного n.

В отсутствие указанных выше продвижений суммируются следующие критерии:

+1 б. Приведён верный ответ.

+1 б. Доказано, что n свободно от квадратов.

Задача 10.6. *(20 баллов)* Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AH^2 = BH^2 + CH^2$. На описанной окружности треугольника ABC нашлись точки D и E такие, что $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. Докажите, что точка H лежит на прямой DE.

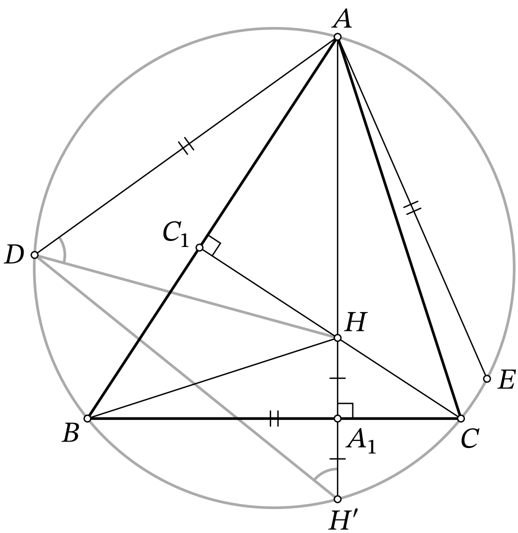

Рис. 2: к решению задачи 10.6.

Решение. Обозначим основания высот треугольника через A_1, B_1, C_1, а точку пересечения прямой AH с описанной окружностью — через H' (рис. 2). Из условий $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AC$ следует, что $AD = AE = BC$. Кроме того, из $\angle BCC_1 = 90° - \angle ABC = \angle BAH' = \angle BCH'$ и $CA_1 \perp HH'$ следует $HA_1 = A_1H'$ (это известное утверждение о том, что отражение ортоцентра треугольника относительно стороны лежит на описанной около него окружности).

По условию $AH^2 = BH^2 + CH^2$. Применяя несколько теорем Пифагора, получаем

$$CH^2 = AH^2 - BH^2 = (AC_1^2 + C_1H^2) - (BC_1^2 + C_1H^2) = \\ = (AC_1^2 + C_1C^2) - (BC_1^2 + C_1C^2) = AC^2 - BC^2.$$

Тогда

$$BC^2 = AC^2 - CH^2 = (AA_1^2 + A_1C^2) - (HA_1^2 + A_1C^2) = AA_1^2 - HA_1^2 = \\ = (AA_1 - HA_1)(AA_1 + HA_1) = AH \cdot (AA_1 + A_1H') = AH \cdot AH'.$$

Наконец, из равенства $BC^2 = AH \cdot AH'$ следует, что $AD^2 = AH \cdot AH'$, т. е. $\frac{AD}{AH'} = \frac{AH}{AD}$. Отсюда следует подобие треугольников $AH'D$ и ADH, откуда $\angle AH'D = \angle ADH$. С другой стороны, $\angle AH'D = \angle ADE$, поскольку эти вписанные углы опираются на равные хорды AD и AE. Из равенства $\angle ADH = \angle ADE$ и следует, что точка H лежит на прямой DE.

Идея другого решения. Как и в предыдущем решении, легко понять, что $AD = AE = BC$. Тогда прямая DE является радикальной осью окружности с центром A и радиусом BC и описанной окружности треугольника ABC. Тогда для доказательства коллинеарности точек D, E, H достаточно проверить, что степени точки H относительно двух этих окружностей одинаковы.

Идея ещё одного решения. Пусть B_1 и C_1 — основания высот из точек B и C соответственно, а B_2 и C_2 — точки пересечения этих высот с описанной окружностью треугольника ABC (из утверждения об отражении ортоцентра следует, что $HC_1 = C_1C_2$ и $HB_1 = B_1B_2$). Тогда EC_2 и DB_2 — диаметры описанной окружности треугольника ABC, пересекающиеся в её центре O. Значит, коллинеарность точек D, E, H эквивалентна тому, что точка, симметричная H относительно O, лежит на отрезке B_2C_2, а это эквивалентно тому, что точка O лежит на отрезке B_1C_1. Несложным счётом углов можно проверить, что $AO \perp B_1C_1$, поэтому для решения задачи достаточно доказать, что точка O является основанием высоты из точки A в треугольнике AB_1C_1. □

Критерии

20 б. Приведено любое полное решение задачи.