

Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников «Высшая лига»
по направлению «Математика»

Время выполнения задания — 210 минут

Стоимость каждой задачи указана возле задачи. Суммарно можно набрать не более 100 баллов. Если сумма баллов за задачи больше 100 баллов, то результат приравнивается к 100 баллам.

1. [20 баллов] Комплексная матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ подобна матрице A^k для любого целого положительного k . Пусть $E \in M_n(\mathbb{C})$ – единичная матрица. Верно ли что матрица $A - E$ является нильпотентной, то есть существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $(A - E)^N = 0$?

2. [20 баллов] Рассмотрим куб со стороной 1 в \mathbb{R}^3 . Точка A выбирается случайным образом внутри куба. Найдите математическое ожидание расстояния от точки A до поверхности куба.

3. [20 баллов] Функция $x(t) = e^{1/t} + \frac{1}{t}$ на области своего определения является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

причём $f(x)$ – непрерывна.

а) Существует ли у этого уравнения решение, определённое на всей прямой?

б) Опишите все решения дифференциального уравнения, определённые на всевозможных интервалах.

4. [20 баллов] Существует ли строго положительная непрерывная функция f на отрезке $[0; 2]$ такая, что для любого целого неотрицательного k число $\int_0^2 f(x)x^k dx$ является целым?

«Математика»

5. [30 баллов] Пусть X — компактное топологическое пространство, $C(X)$ — пространство непрерывных функций на X со значениями в \mathbb{R} , снабженное нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in K} f(x), f \in C(X).$$

Для произвольного компактного подмножества $K \subset C(X)$ определим функцию

$$g: X \rightarrow \mathbb{R}$$

правилом

$$x \mapsto \sup_{f \in K} f(x).$$

Обязательно ли непрерывна функция g (докажите или приведите контрпример)?

6. [30 баллов] Найдите количество точных комплексных представлений (с точностью до изоморфизма) группы S_4 размерности 2023. Напомним, что точное комплексное представление — это инъективный гомоморфизм групп

$$S_4 \rightarrow GL_{2023}(\mathbb{C}).$$

«Математическая физика»

7. [30 баллов] Упругая однородная балка постоянного сечения имеет длину L . Балка закреплена одним концом в вертикальной стене так, что в точке входа в стену балка горизонтальна. Линейная плотность балки ρ . На свободном конце балки закреплена точечная масса m . В приближении малой деформации плотность энергии упругой деформации балки дается выражением

$$W(x) = \kappa \frac{(y'')^2}{2},$$

где $\kappa > 0$ известная константа, а значение гладкой функции $y(x)$ задает величину отклонения балки от горизонтали на расстоянии x от точки крепления. Определите форму деформированной балки, то есть, найдите явный вид функции $y(x)$. Балка находится в однородном вертикальном поле тяжести с ускорением свободного падения g .

Указание. Напишите выражение для полной энергии деформированной балки в поле тяжести в виде функционала от ее формы $y(x)$. Истинная форма балки дает экстремум этого функционала.

8. [30 баллов] Два точечных противоположных по знаку заряда q и $-q$ закреплены на концах непроводящего стержня длины $2l$. Стержень может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. На оси вращения также находится блок радиуса R , жестко связанный со стержнем с зарядами. На блок намотана тонкая нерастяжимая невесомая нить, на свободном конце которой висит груз массы m . Груз может опускаться вдоль вертикальной прямой, приводя во вращение блок со стержнем. Ускорение свободного падения g , трением в системе можно пренебречь. Определите установившуюся угловую скорость вращения стержня, предполагая, что скорость движения зарядов в стационарном режиме много меньше скорости света c . При каком соотношении на параметры задачи это будет выполнено?

Указание. Мощность электромагнитного излучения зарядов оцените в дипольном приближении.