

Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Прикладная математика» состоит из двух частей:

**Инвариантная часть** представлена заданиями № 1–3. Их нужно выполнить всем участникам.

**Вариативная часть** разделена на треки:

- Трек «Математические методы анализа в экономике»: задания № 4–11.
- Трек «Математические методы в социологии»: задания № 12–13.
- Трек «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»: задания № 14–18.

Задания представлены на русском и на английском языке. Ответ участник может дать тоже как на русском, так и на английском языке.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться успешно проявить себя в любых двух треках, чтобы претендовать на статус медалиста.

Работа оформляется в письменном виде на чистых листах А4. Полученный ответ выписывается в конце решения и отдельно обводится в рамку. Фото/скан рукописной работы загружается в тестирующую систему **в конце состязания** (на это у вас будет 15 минут).

Во время выполнения заданий вы можете:

- пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги), но на проверку он не предъявляется;
- использовать встроенный в систему калькулятор;
- использовать таблицу значений функций распределений. Справочный материал можно открыть на новой вкладке/в новом окне, это не будет считаться нарушением. Использование других справочных материалов и сторонних ресурсов строго запрещено.

[Нажмите, чтобы открыть справочные материалы](#)

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 14,00

Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра  $\alpha$ . Решение записать в векторном виде.

$$\begin{cases} (1 + \alpha)x_1 + x_2 + x_3 = \alpha^2 + 3\alpha \\ x_1 + (1 + \alpha)x_2 + x_3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \\ x_1 + x_2 + (1 + \alpha)x_3 = \alpha^4 + 3\alpha^3 \end{cases}$$

Вопрос 2

Балл: 14,00

Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  равного объема  $n$  из распределения Бернулли. Известно, что выборочные средние равны  $\bar{x} = 0.5$  и  $\bar{y} = 0.4$ . По выборкам был построен симметричный 95%-й асимптотический доверительный интервал для разницы долей  $p_X - p_Y$ , реализация которого приняла вид  $(-0.0143, 0.2143)$ .

1. Найдите объем выборки  $n$ . Ответ округлите до ближайшего натурального числа.
2. На 5% уровне значимости проверьте гипотезу  $H_0: p_X - p_Y = 0.2$  против двусторонней альтернативной гипотезы.

Вопрос 3

Балл: 14,00

Management of a large corporation seeks to evaluate the performance of two branch offices (A and B). The ability to meet deadlines is one of the comparative efficiency criteria. Branch offices A and B perform independently of each other. From 140 randomly selected projects of branch A, 112 met deadlines. From 150 randomly selected projects of branch B, 129 met deadlines. Can we assert that branch A violates deadlines more often than branch B? Take 95% confidence interval. An alternative hypothesis is directional.

Вопрос 4

Балл: 7,25

Let  $M_{22}$  be a linear space of real matrices of size  $2 \times 2$  (with the standard operations of addition and multiplication by a real number). Let  $\mathcal{A} : M_{22} \rightarrow M_{22}$  be the linear operator defined by

$$\mathcal{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

where  $X^T$  is the transposed matrix  $X$ . Find the matrix of the operator  $\mathcal{A}$  in Jordan form.

Вопрос 5

Балл: 7,25

Calculate the integral

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1}_{2023 \text{ times}} \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 2023x_{2023}}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{2023}$$

or prove that it diverges

Вопрос 6

Балл: 7,25

$X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые и одинаково распределённые случайные величины с функцией плотности распределения  $f_X$  :

$$f_X = \begin{cases} 1/2022\theta, & X \in [\theta, 2023\theta] \\ 0, & X \notin [\theta, 2023\theta] \end{cases}$$

- (a) Найдите оценку параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.  
 (b) Найдите математическое ожидание полученной оценки.

Вопрос 7

Балл: 7,25

Solve the differential equation

$$y''' - 8y = 24e^{2x} + 72\cos^2 x.$$

Вопрос 8

Балл: 7,25

Вычислите следующий предел или докажите, что он не существует:

$$\lim_{x \rightarrow 2023-0} (2023 - x)^{\sin \pi(2024-x)}$$

Вопрос 9

Балл: 7,25

Let  $X_1, \dots, X_{25}$  be a sample from normal distribution,  $\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \theta$ .

1. Built a 90% symmetric two-sided confidence interval for unknown parameter  $\theta$ .
2. Find its realization given that  $\sum_{i=1}^{25} X_i = 400$  and  $\sum_{i=1}^{25} X_i^2 = 5625$ .

If  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , then  $\mathbb{P}(\xi < 1.64) = 0.950$ ,  $\mathbb{P}(\xi < 1.96) = 0.975$  and  $\mathbb{P}(\xi < 2.58) = 0.995$ .

Вопрос 10

Балл: 7,25

Optimization. Managing the client department

There are three employees in the bank's client department: two specialists, let us call them  $A_1$  and  $A_2$  and an office manager who distributes clients who come to the client department with various problems to two specialists. Work experience has shown that, firstly, customer problems can be combined into two classes —  $B_1$  and  $B_2$ . Secondly, the effectiveness of solving problems by specialists can be characterized by a matrix:

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	0,4	0,7
$A_2$	0,6	0,3

Part 1. The manager's office is interested in several questions:

1. What are the limits of the efficiency of the entire department?
2. How to distribute clients among specialists in order to achieve the best efficiency?

Part 2. Employee  $A_1$  has been trained in advanced training courses. After that, the efficiency matrix took the form

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	0,8	0,7
$A_2$	0,6	0,3

The manager's office is interested in several questions:

3. How to optimally distribute clients among specialists in the new conditions in order to achieve the best efficiency?
4. What is the value of the efficiency of the department if the clients are distributed among specialists optimally?

Вопрос 11

Балл: 7,25

Let  $\xi_1$  and  $\xi_2$  be two independent and identically distributed exponential random variables with parameter  $\lambda > 0$ . Prove that random variables  $\max(\xi_1, \xi_2)$  and  $\xi_1 + 0.5\xi_2$  coincide by distribution.

Вопрос 12

Балл: 29,00

**Write a mini-essay on the proposed topic. Answer can be written in Russian or English.**

Table 1 presents a part of a database obtained via consumer behavior questionnaire survey of the population of a big city. Respondents were asked to indicate up to four favorite food products, which they have consumed during last week (variables "food-1,2,3,4" in Table 1) as well as up to two favorite alcohol drinks (variables "drink-1,2" in Table 1) and entertainments (variables "ent-1,2" in Table 1).

Suggest classification procedure of 9 respondents in Table 1 into groups with homogeneous consumption behavior. Show initial calculation stages (full calculations till the end are not required).

Take a look at the data in Table 1 and suggest hypotheses about possible grouping of those 9 respondents. Suggest expectations about distinctive socio-demographic characteristics of those groups. Provide theoretical basis, which underlies those hypotheses.

A part of the database of consumer behavior survey (N=1500)

No	gender	age	income	occupation	food-1	food-2	food-3	food-4	drink-1	drink-2	ent-1	ent-2
1	female	51	488	doctor	fresh vegetables	fresh fruits	fresh meat	yogurt			theatre	
2	female	36	825	individual entrepreneur	fresh meat	squids	cakes and biscuits	chocolate	wine		cinema	night club
3	male	25	521	marketing specialist	fresh meat	cheese	canned food	octopuses	whiskey		night club	cinema
4	male	62	644	university professor	fresh meat	cheese	fresh vegetables	chocolate	cognac		theatre	philharmonic hall
5	male	29	510	electrician	dumplings/ ravioli	sausages	chocolate	processed food	beer		pop music concert	night club
6	male	44	1000	company director	caviar	oysters	fresh meat	cheese	whiskey	vodka	sport event	
7	female	32	673	designer	cakes and biscuits	fish	oysters	yogurt	wine		cinema	
8	female	47	412	school teacher	cakes and biscuits	fresh vegetables	yogurt	fish			museum	
9	male	51	492	plumber	sausages	dumplings/ ravioli	yogurt	processed food	vodka	beer	sport event	

Вопрос 13

Балл: 29,00

**Write a mini-essay on the proposed topic. Answer can be written in Russian or English.**

Demonstrate how social capital influences human capital using any relevant empirical example. Questionnaire survey is the available method of obtaining empirical data. Describe the desirable database which you plan to get (variables and their values). Suggest relevant hypothesis as well as statistical test applicable to the database.

Вопрос 14

Балл: 10,00

В каталоге компьютера находится N файлов произвольного типа, каждый файл занимает не более, чем M байт. Необходимо определить количество уникальных по содержанию файлов, создать папку под каждую категорию и переместить туда одинаковые файлы. При этом в оперативную память компьютера возможно загрузить не более 5 файлов одновременно.

Написать оптимальный по числу операций алгоритм и оценить его сложность в терминах "O" (O большое).

Вопрос 15

Балл: 15,00

Число особых частиц в закрытом контейнере эволюционирует следующим образом. В начальный момент  $t=0$  в контейнере находится 1 частица. Она делится на 2 частицы того же типа через случайное время  $Y$ , распределенное по показательному (экспоненциальному) закону со средним 1 час. Случайную величину  $Y$  будем называть временем жизни частицы.

Новые две частицы ведут себя также, как исходная первая частица. А именно, каждая частица делится на 2 через случайное время, которое распределено по тому же закону, что и  $Y$ . Новые частицы эволюционируют таким же образом, как и их предки. Предполагается, что времена жизни всех частиц независимы.

Вычислить

1. вероятность того, что через 1 час в контейнере будет не более 2 частиц;
2. вероятность того, что через 1 час в контейнере будет ровно 1 частица.

Вопрос 16

Балл: 10,00

Некоторый консервативный физический процесс описывается дифференциальным уравнением  $x''(t) + \alpha(3x^2 - 1) = 0$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$  – некоторый параметр,  $t$  – время,  $x(t)$  – координата. Известно, что при некоторых значениях параметра  $\alpha$  и некоторых начальных данных (начальной координаты  $x(0)$  и начальной скорости  $x'(0)$ ) у данного уравнения есть периодические решения.

Найдите все возможные значения параметра  $\alpha$ , при которых данная задача имеет периодические решения, полная энергия которых равна 1.

Вопрос 17

Балл: 10,00

Пусть имеется одноканальная система массового обслуживания  $M|M|1|0$  с приоритетами: входной поток требований пуассоновский с параметром  $\lambda$ , время обслуживания любого требования прибором распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . Пришедшее требование назначается приоритетным с вероятностью  $1/3$  и неприоритетным с вероятностью  $2/3$ . Если прибор занят неприоритетным требованием, то пришедшее приоритетное требование вытесняет неприоритетное и оно теряется.

Требуется описать систему массового обслуживания однородным марковским процессом (с тремя состояниями) и найти его стационарное распределение; в частности, найти вероятность того, что в удаленный момент времени система будет свободна. Ответ получить в общем виде в терминах  $\lambda$  и  $\mu$ .

Вопрос 18

Балл: 13,00

Функция  $y = f(x)$  задана таблицей значений:

$x$	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	3	4	-1	1	2

1. Найти наилучшее приближение функции  $y = f(x)$  полиномом 2й степени
2. Построить для  $y = f(x)$  интерполяционный полином 4й степени.