Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Прикладная математика и информатика» состоит из двух частей:

Инвариантная часть представлена заданиями № 1–7. Их нужно выполнить всем участникам.

Вариативная часть разделена на треки:

- Трек «Анализ данных и искусственный интеллект»: задания № 8–10.
- Трек «Финансовые технологии»: задания № 11–13.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться максимально результативно выполнить задания двух треков, чтобы претендовать на статус медалиста.

Все задания выполняются в этой системе: решения вносите в специальное поле для ответов. Если решение требует указания формул, графиков и схем, можно выполнить решение на чистых листах А4 и загрузить фото/скан работы в конце состязания. Полученный ответ выписывается в конце решения и отдельно обводится в рамку.

Во время выполнения заданий вы можете:
– пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги), но на проверку он не предъявляется;
– использовать встроенный в систему калькулятор;
– использовать таблицы математической статистики. Справочный материал можно открыть на новой вкладке/в новом окне, это не будет считаться нарушением. Использование других справочных материалов и сторонних ресурсов строго запрещено.

Нажмите, чтобы открыть справочные материалы

В последние 15 минут, когда таймер подсветится красным, выполнять задания запрещено: это время отведено на загрузку файлов. Если справитесь с заданиями раньше, можете не дожидаться последних 15 минут, а начинать загружать файлы и завершать работу, но с момента начала фотографирования/сканирования делать пометки в работе уже не разрешается.

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 10,00

Пусть $y(x)$ – гладкая функция на прямой, такая что:

$\int_{-x}^{x} t^2 y(t)dt = y(x) - 1.$

Найти функцию $y(x)$.

Вопрос 2

Балл: 10,00

Найдите $(tr(A))^3 - 3tr(A^2) \cdot tr(A) + 2tr(A^3)$,

где $tr(\cdot)$ – это след матрицы, а

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ -20 & -4 & 26 \\ -14 & -3 & 19 \end{pmatrix}$$

Вопрос 3

Балл: 10,00

Дана выборка случайных одинаково равномерно распределенных случайных величин $x_1, \ldots, x_n$. Случайные величины распределены на интервале $[0, \phi]$. Требуется методом максимального правдоподобия оценить параметр ϕ.

Вопрос 4

Балл: 10,00

Бинарное отношение **P** определено на множестве из **n** альтернатив. При удалении любой из альтернатив, отношение становится строгим линейным порядком. При каких **n** из этого следует, что **P** – линейный порядок?

Вопрос 5

Балл: 10,00

Найти все коэффициенты многочлена **P(n)**, заданного следующим образом:

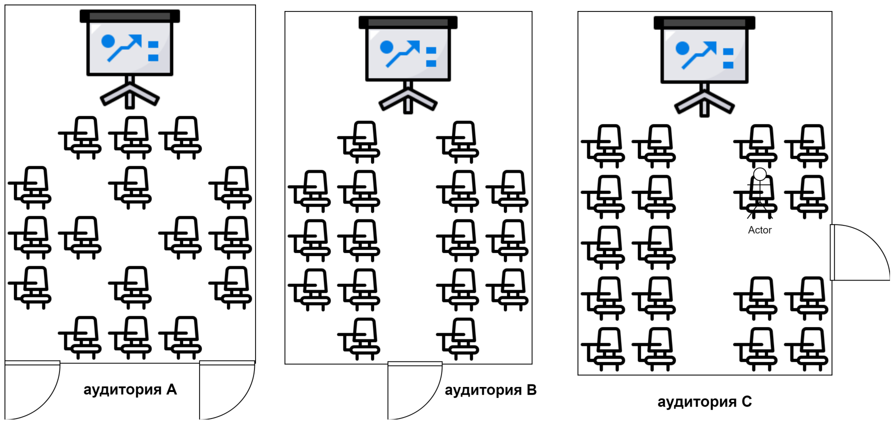
$$P(n) = \frac{1152}{(n!)^2} \cdot \begin{vmatrix} 3^2+1 & 5 & 5 & \ldots & 5 \\ 5 & 4^2+1 & 5 & \ldots & 5 \\ 5 & 5 & 5^2+1 & \ldots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \ldots & (n+2)^2+1. \end{vmatrix}.$$

Вопрос 6

Балл: 10,00

Во втором туре олимпиады, проходящем в очном формате, будет участвовать 16 студентов. Студентам будет предложено выполнить несколько письменных заданий. Проверка заданий прошлых олимпиад показала, что студенты, сидящие рядом друг с другом и по диагонали друг от друга, имеют похожие решения задач, поэтому было решено не сажать студентов таким образом.

Для проведения олимпиады в университете выделили три аудитории, схемы которых показаны на рисунках.



Ответьте на следующие вопросы:

1. Можно ли разместить 16 студентов в этих аудиториях согласно описанным требованиям?
2. В каждой аудитории должен находиться преподаватель, контролирующий работу студентов. Какое минимальное количество преподавателей нужно задействовать чтобы провести олимпиаду?
3. Предложите схему размещения студентов и алгоритм, согласно которому получено это размещение.

Вопрос 7

Балл: 10,00

Мы хотим покрыть подмножество квадратной сетки плитками домино так, чтобы каждая плитка покрывала ровно два квадрата и никакие две плитки не перекрывались. Такое покрытие называется замощением. Подмножество предполагается односвязным, т. е. без дырок. На **Рис.** 1 слева изображено такое покрытие. Мы кодируем любое замощение плитками домино взвешенным ориентированным графом следующим образом. Квадраты сетки окрашены в черный и белый цвета как у шахматной доски. Края квадратов направлены так, что они поворачиваются по часовой стрелке вокруг черного квадрата и против часовой стрелки вокруг белого. Ребро получает вес 1, если оно находится на границе домино, и −3 в противном случае. **Рис.** 1 справа иллюстрирует это. Высота вершины — это целое число, определяемое следующим образом. Сначала высота произвольной вершины приравнена к 0. Затем, каждый раз, когда направленное ребро идет из **A** в **B**, высота **B** равна высоте **A** плюс вес ребра.

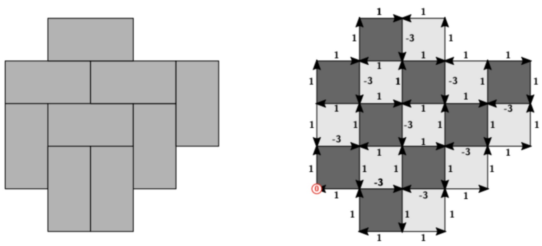


Рис. 1 . Замощение плитками домино (слева) и соответствующий граф (справа).

Рассмотрим граф из правой части Рис.1, у которого высота произвольной вершины на границе задано равным 0. Чему равны наименьшая и наибольшая высоты вершин данного графа?

Вопрос 8

Балл: 10,00

Найдите минимальное **n**, при котором существует связный граф, дополнение к которому непланарно.

Вопрос 9

Балл: 10,00

Рассмотрим язык логики первого порядка с предикатным символом равенства и двуместным функциональным символом f. Формально язык задаётся следующим образом: атомарные формулы имеют вид $u = v$, где u и v– выражения (термы), построенные из переменных с помощью символа f (например: $f(f(x, y), x) = f(w, y)$). Сложные формулы строятся из атомарных с помощью логических связок (и, или, не, импликация) и кванторов ("для любого" и "существует"). Переменные, не связанные кванторами, называются свободными.

Рассмотрим две интерпретации этого языка. Первая интерпретация задаётся на множестве натуральных чисел с нулём (по нему "бегают" переменные), при этом f интерпретируется операцией сложения. При данных значениях свободных переменных определяются значения термов и истинность формул. В частности, символ равенства понимается как совпадение значений термов. Вторая интерпретация задаётся на множестве натуральных чисел без нуля, и f в ней интерпретируется операцией умножения.

Например, в обеих интерпретациях истинна формула $\forall x, \forall y, f(x, y) = f(y, x)$ (выражающая коммутативность сложения или умножения соответственно), но ложна формула $\forall x, \forall y, \exists z, f(x, z) = y$ (в первой интерпретации должно быть $z = y - x$, во второй $z = y/x$, но наши множества не замкнуты относительно вычитания и деления соответственно).

Существует ли замкнутая (без свободных переменных) формула, истинная в первой интерпретации и ложная во второй?

Вопрос 10

Балл: 10,00

Мы получили модель классификации, которая предсказывает, есть ли у пациента рак C^+ или нет C^-. Тест возвращает значение $x \in R$ и определяет вероятность того, есть ли у пациента рак согласно функции:

$$p(y = C^+|x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x \end{cases}$$

Мы также знаем, что ложноотрицательный результат обходится в 2 раза дороже, ложноположительный. Мы имеем следующую матрицу ошибку L:

		Predicted	
		C^-	C^+
True results	C^-	0	20
	C^+	40	0

Мы выбираем фиксированное значение x^* и предсказываем C^+, если результат теста больше x^*, и C^- в противном случае.

Если результат теста равномерно распределен в интервале $[-1, 1]$, каково минимально возможное значение риска?

Примечание: риск (R) в теории принятия решений – это математическое ожидание функции потерь L.

Вопрос 11

Балл: 10,00

Мышь Джерри сидит в углу *A* прямоугольной комнаты *ABCD*, а ее норка находится в соседнем углу *B*. Кот Том сидит в другом соседнем с *A* углу *D*. Известно, что *AB = 3* метра, *AD = 4* метра. Доев сыр из мышеловки, Джерри бежит к своей норке вдоль стены со скоростью *3* метра в секунду, а Том пытается поймать Джерри и бежит со скоростью *6* метров в секунду. Том бежит честно (не к норке и не наперерез) за Джерри. С математической точки зрения это означает, что, если считать Тома и Джерри точками, они в каждый момент времени находятся на касательной к траектории движения Тома.

Найдите уравнение траектории движения Тома, принимая точку *A* за начало координат, сторону *AB* за ось *y*, а сторону *AD* за ось *x* (т.е. вершины прямоугольника имеют следующие координаты *A(0, 0), B(0, 3), D(4, 0).*

Успеет ли Джерри добежать до норки или Том его поймает?

Если не успеет, то какое расстояние преодолеет Джерри к этому времени?

Вопрос 12

Балл: 10,00

В модели парной регрессии, удовлетворяющей предпосылкам Гаусса–Маркова с нормально распределенными ошибками, оцениваемой по 30 наблюдениям известно, что $Var(\varepsilon_7) = 9$. Найдите $E(\varepsilon_2), Cov(\varepsilon_2, \varepsilon_3), P(\varepsilon_2 > \varepsilon_1), Var(\varepsilon_5), E(\varepsilon_4^2)$.

Вопрос 13

Балл: 10,00

По данным, содержащим 30 наблюдений, построена регрессия:

$\hat{y} = 1.38 + 5.25x + 2.62d + 2.59xd$, где d - фиктивная переменная и определяется так:

$$d_i = \begin{cases} 1, i \in \{1, \ldots, 20\} \\ 0, i \in \{21, \ldots, 30\} \end{cases}$$

Найдите оценки коэффициентов в модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ построенной по первым 20 наблюдениям, т.е. когда $i \in \{1, \ldots, 20\}$